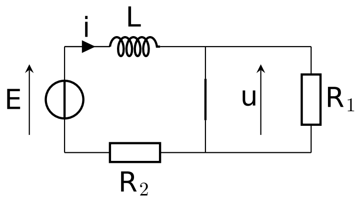
Devoir Surveillé

DS 1 – Correction

I Étincelle de rupture à l'ouverture d'un circuit inductif

I.1 Régime permanent avec interrupteur fermé



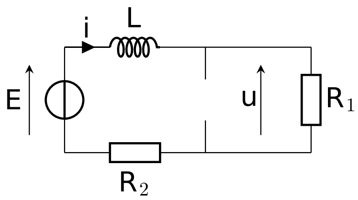
1 – L'interrupteur fermé se comporte comme un fil, de résistance nulle. Tout le courant va donc passer par ce fil, et rien ne passera par la résistance.

2 – Comme aucun courant ne passe dans R_1, on peut faire comme si cette branche du circuit n'existait pas.

La tension u est la tension aux bornes de l'interrupteur fermé, donc $\boxed{u = 0}$.

Le régime permanent correspond ici à des grandeurs constantes dans le temps. La bobine se comporte donc comme un fil. Le circuit est donc simplement un générateur E en série avec une résistance R_2, si bien que $\boxed{i = E/R_2}$.

I.2 Régime transitoire après l'ouverture de l'interrupteur



3.a – Au bout d'un temps long, le régime permanent est atteint et ici les grandeurs sont constantes dans le temps. La bobine se comporte donc comme un fil, et le circuit comporte uniquement un générateur E en série avec une résistance R_1 et une résistance R_2.

On a donc $\boxed{i_\infty = E/(R_1 + R_2)}$.

3.b – D'après la loi d'Ohm : $u = R_1\, i$, on a donc $\boxed{u_\infty = R_1 \times i_\infty = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} E}$.

4.a – On utilise le fait que <u>le courant traversant une bobine est une fonction continue du temps</u>. Ainsi, i à $t = 0^+$ (juste après l'ouverture de l'interrupteur) a la même valeur que juste avant l'ouverture de l'interrupteur. On a calculé cette valeur dans la question 2 : il s'agissait de $i = E/R_2$. On a donc $\boxed{i(0^+) = \dfrac{E}{R_2}}$.

4.b – u et i sont toujours reliés par la loi d'Ohm, donc on a : $\boxed{u(0^+) = R_1 i(0^+) = E \times \dfrac{R_1}{R_2}}$.

4.c – On trouve $i(0^+) = 10\,\text{mA}$ et $u(0^+) = 5.0 \times 10^2\,\text{V}$.

5 – On repère les tensions dans le circuit en mettant les flèches dans le bon sens (à contre-courant, convention récepteur). La loi des mailles donne : $E = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + R_1 i + R_2 i$. On divise par L pour ne plus rien avoir devant la dérivée :

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R_1 + R_2}{L} i = \frac{E}{L}, \tag{1}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau} i = \frac{E}{L},} \tag{2}$$

avec $\tau = L/(R_1 + R_2)$.

6 – Il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre avec coefficients constants et second membre constant. La solution est la somme de :

- La solution de l'équation homogène $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau} i = 0$, c'est à dire $i_H = A\mathrm{e}^{-t/\tau}$, avec A une constante.
- Une solution particulière, que l'on choisit constante. On a alors $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t = 0$, et on voit que $i = E/(R_1 + R_2)$ convient.

On a donc

$$i(t) = A\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{E}{R_1 + R_2}. \tag{3}$$

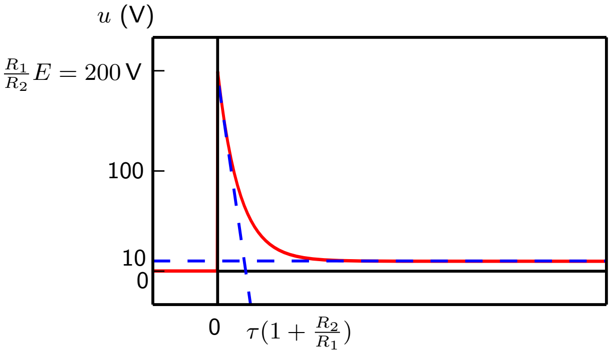
On détermine la constante A à l'aide de la condition initiale $i(0^+) = \dfrac{E}{R_2}$. On trouve alors $A = E\dfrac{R_1}{R_2(R_1+R_2)}$.
Finalement, on a bien

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R_1+R_2}\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\mathrm{e}^{-t/\tau}\right).} \tag{4}$$

On peut vérifier rapidement sur cette expression qu'on a bien $i \to E/(R_1+R_2)$ en $+\infty$, et $i(0) = E/R_2$, comme prévu.

7 – On en déduit :

$$\boxed{u(t) = R_1 i(t) = E \times \frac{R_1}{R_1+R_2}\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\mathrm{e}^{-t/\tau}\right).} \tag{5}$$



I.3 Commentaires sur la valeur élevée de u

$$\|\vec{E}_{\text{disruptif}}(\text{air})\| \approx 3{,}6 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} \approx 36\,000 \text{ V} \cdot \text{cm}^{-1} \tag{6}$$

On peut interpréter de manière très simple cette formule en disant que, dans de l'air sec, il faut une différence de potentiel de 36 000 volts pour faire une étincelle entre deux électrodes planes distantes de 1 centimètre.

8 – S'il faut 36 000 V pour un centimètre, alors il faut $u = 3\,600$ V pour 1 mm.

9 – Lorsque u dépasse cette valeur, la valeur du champ électrique est assez élevée pour arracher certains des électrons des atomes. L'air devient alors conducteur et un courant électrique passe. Visuellement, il se produit une étincelle.

II Lecture de diagramme de Bode

10 – Il s'agit d'un filtre passe-haut, puisqu'il coupe les basses fréquences et laisse passer les hautes.

Son asymptote basse fréquence a une pente de -40dB/décade, il s'agit donc d'un filtre du seconde ordre.

Sa fréquence de coupure est d'environ $f_0 \simeq 10$ kHz. Ceci peut se voir sur la courbe de phase en repérant le point d'inflexion.

11 – On rappelle que de façon générale, un signal $A\cos(\omega t + \varphi)$ est transformé en $|\underline{H}(\mathrm{j}\omega)| \times A\cos(\omega t + \varphi + \arg(H(\mathrm{j}\omega))$.

On rappelle également que $G = 20\log|H|$, et donc que $|H| = 10^{G/20}$. En particulier, une atténuation de 20 dB correspond à $G = -20$ et donc à diviser par 10 le signal d'entrée.

Un filtre étant linéaire, on peut raisonner terme par terme.

- Le terme constant E_0 est complètement supprimé.
- Le terme $E_0\cos(\omega t)$ se situe à 1 kHz. Il est atténué de 40 dB environ, soit d'un facteur 100. Il est également déphasé de π. Il devient donc : $E_0/100 \times \cos(\omega t + \pi)$.
- Le terme $E_0\cos(10\omega t + \pi/4)$ se situe à 10 kHz. Il est atténué d'environ 10 dB, soit d'un facteur $|H| = 10^{-10/20} = 0.3$. Il est également déphasé de $+\pi/2$. Il devient donc : $0.3E_0 \times \cos(10\omega t + \pi/4 + \pi/2)$.
- Le terme $E_0\cos(100\omega t)$ se situe à 100 kHz. Il n'est ni atténué ni déphasé, et reste donc tel quel.

Finalement, on a

$$s(t) = E_0/100 \times \cos(\omega t + \pi) + 0.3E_0 \times \cos(10\omega t + \pi/4 + \pi/2) + E_0 \times \cos(100\omega t). \tag{7}$$