

## 1.1 TSI CCS 2015, statique des fluides (ballon solaire)

### Correction

1. L'air dans le ballon étant plus chaud que l'air extérieur, sa masse volumique est inférieure. La poussée d'Archimède qui s'exerce sur ce volume est donc supérieure à son poids : la ballon pourra décoller.
2. Axe  $z$  vers le haut.  $\vec{v} = v\vec{e}_z$ . On a  $m\dot{v} = -mg - \alpha v + \rho_e V_b g$  avec  $\rho_e$  la masse volumique de l'air extérieur, qui dépend de  $z$ , mais on ignore cette dépendance pour intégrer l'équation :

$$v(t) = \lambda e^{-\alpha t/m} + \frac{\rho_e V_b g}{\alpha} - \frac{mg}{\alpha}.$$

On détermine la constante avec  $v(t=0) = 0$ , et on a finalement :

$$v(t) = \frac{m}{\alpha} (\rho_e V_b - m) (1 - e^{-\alpha t/m}).$$

3.  $p(z) = p_0 \exp\{-z/H\}$ , avec  $H = \frac{RT}{Mg} = 8.3 \text{ km}$  (expression à démontrer à partir de la relation fondamentale de la statique des fluides,  $\frac{dp}{dz} = -\rho g$  si axe vers le haut, et  $\rho(z)$  relié à  $p$  par la loi des gaz parfaits :  $\rho = Mp/(RT)$ ).
4. On néglige la poussée d'Archimède devant le poids du ballon (on pourrait l'estimer, mais c'est valide car  $T = T_i$  ici et car c'est une chute avec une vitesse finale assez élevée).

On a donc  $m\dot{v} = -mg - \alpha v$ , et quand la vitesse limite est atteinte  $\dot{v} = 0$ , donc  $\alpha = \frac{mg}{-v_{\text{limite}}} = 3.2 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ .

5. À mesure que le ballon s'élève, la masse volumique de l'air environnant diminue selon la loi  $\rho_e(z) = \frac{Mp(z)}{RT} = \frac{Mp_0}{RT} e^{-z/H} = \rho_0 e^{-z/H}$  où on a posé  $\rho_0 = \frac{Mp_0}{RT} = 1.23 \text{ kg/m}^3$ .

En conséquence, la poussée d'Archimède  $\rho_e V_b g$  diminue.

Il arrive donc une altitude où  $\rho_e V_b g$  devient inférieure à  $mg$ , altitude où l'ascension s'arrête.

L'altitude limite vérifie donc  $\rho_0 e^{-z/H} V_b g = mg$ , soit  $z = H \ln \frac{\rho_0 V_b}{m}$ .

On ne connaît ni la masse totale  $m$  du ballon et équipements, ni le volume  $V_b$ . On peut toutefois dire que l'altitude la plus élevée que l'on puisse espérer est atteinte lorsque la masse est minimale, donc lorsque le ballon n'emporte rien d'autre que son enveloppe et l'air qu'elle contient, ceci pouvant être approximé par une masse  $m = \rho_{\text{air}}(T_i, p) V_b$ .

On souligne ici que  $\rho_{\text{air}}(T_i, p)$  est la masse volumique de l'air contenue dans le ballon, qui dépend de la température  $T_i$  et de la pression  $p(z)$ . Cette pression est égale à la pression extérieure car l'enveloppe du ballon est ouverte sur l'extérieur.

Ainsi l'altitude maximale est  $z = H \ln \frac{\rho_0 V_b}{\rho_{\text{air}}(T_i, p(z)) V_b} = H \ln \frac{\rho_{\text{air}}(T, p_0)}{\rho_{\text{air}}(T_i, p(z))}$ .

C'est une équation compliquée à résoudre car  $z$  intervient également dans  $p(z)$ . On va donc supposer, en première approximation, que  $p(z) \simeq p_0$ . On a alors  $\frac{\rho_{\text{air}}(T, p_0)}{\rho_{\text{air}}(T_i, p(z))} = \frac{T_i}{T}$ , et donc l'altitude maximale

$$\text{est } \boxed{z_{\text{max}} = H \ln \frac{T_i}{T} = 565 \text{ m.}}$$

On vérifie après coup que notre hypothèse  $p(z_{\text{max}}) \simeq p_0$  est raisonnable, puisqu'on a  $p(565 \text{ m})/p_0 = 0.93$ .

## 1.2 TSI CCS 2015, électromagnétisme (laser mégajoule)

### Correction

1. On choisit l'expression suivante pour l'OPPM produite par un seul faisceau :  $\vec{E} = E_0 \vec{e}_z \cos(\omega t - kx)$ .  
Le vecteur d'onde est donc  $\vec{k} = k\vec{e}_x$ , et on rappelle la relation  $\omega/k = c$ .

Le champ magnétique est alors donné par  $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = -\frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$ .

Le vecteur de Poynting est  $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kx)$ .

Sa valeur moyenne est  $\|\langle \vec{\Pi} \rangle\| = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}$ .

Enfin, on a  $\|\vec{\Pi}\| \times S \times t = \text{énergie pour un faisceau} = \frac{E}{264}$ .

$$D'où \quad E_0 = \sqrt{\frac{E}{264} \frac{2\mu_0 c}{St}} = 4 \times 10^9 \text{ V/m.}$$

$$\text{On en déduit} \quad \|\vec{B}\| = \frac{E_0}{c} = 13 \text{ T.}$$

2. Il faudrait comparer l'énergie d'un photon du faisceau laser à l'énergie d'ionisation des atomes considérés.

$E = h\nu$  pour le photon avec  $h$  la constante de Planck, et  $E_{\text{ionisation}} \sim 10 \text{ eV} \sim 10^{-18} \text{ J}$ .

Tout dépend donc de la fréquence du faisceau.

### 1.3 PSI CCS 2017, électronique (filtre passe-haut)

#### Correction

1. Tracer le gabarit.

Pour un filtre passe haut d'ordre 1, la pente de la coupure basse fréquence est de 20 dB/dec, c'est-à-dire que l'on a  $G = 20 \log f$ , et donc entre deux points  $(f_1, G_1)$ ,  $(f_2, G_2)$  on a la relation  $G_2 - G_1 = 20 \log f_2/f_1$ , soit  $\frac{G_2 - G_1}{\log f_2/f_1} = 20 \text{ dB/dec}$ .

Or ici on veut une pente qui est au moins égale à  $\frac{-0.5 - (-20)}{\log 300/50} = 25 \text{ dB/dec}$ . C'est donc impossible avec un ordre 1.

2. On obtient  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et  $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ .

3. On montre d'abord que  $G = 20 \log |H| = -10 \log g(x)$ .

On traduit la contrainte  $G \leq -20 \text{ dB} \Leftrightarrow g(x) \geq 2 \Leftrightarrow x \leq 0.3 \Leftrightarrow \omega \leq 0.3\omega_0$ .

On veut que cette atténuation soit réalisée pour  $\omega = 2\pi \times 50 \text{ Hz}$ , donc il faut  $2\pi \times 50 \text{ Hz} \leq 0.3\omega_0$ , soit  $\omega_0 \geq 1.0 \times 10^3 \text{ rad/s}$ .

On prend donc  $\omega_0 = 1.0 \times 10^3 \text{ rad/s}$ . On vérifie alors que pour  $\omega = 2\pi \times 300 \text{ Hz}$  on a bien  $G = -0.33 \text{ dB}$  qui est supérieur à la contrainte  $-0.5 \text{ dB}$ .

Il faut donc  $L = \frac{1}{\omega_0^2 C} \geq 1 \text{ H}$ . Ceci fait beaucoup, et impose une bobine très volumineuse.

4. (question non présente dans le sujet de départ)

Il faut obligatoirement faire le schéma au tableau et reporter les tensions et courants utiles. Et mettre des flèches dans le sens récepteur.

Notons  $i_1$  le courant passant dans  $R_1$  et  $i_2$  le courant passant dans  $C_0$ . On a  $i = i_1 + i_2$ .

On décrit l'ALI avec le modèle idéal, on a donc  $i^+ = i^- = 0$ . De plus le montage possède une unique rétroaction négative, donc l'ALI fonctionne en régime linéaire. On a donc  $V^+ = V^-$ .

On en déduit que le courant passant dans  $R_2$  est  $i_2$ .

On a donc  $u_s = \frac{1}{jC_0\omega} i_2 + R_2 i_2 = \left( \frac{1}{jC_0\omega} + R_2 \right) i_2$ .

Comme  $V^+ = V^-$ , on a la même tension aux bornes de  $R_1$  et aux bornes de  $C_0$ , donc  $R_1 i_1 = \frac{1}{jC_0\omega} i_2$ .

Enfin, on a

$$\begin{aligned} i &= i_1 + i_2 \\ &= \frac{1}{jR_1 C_0 \omega} i_2 + i_2 \\ &= \left( \frac{1}{jR_1 C_0 \omega} + 1 \right) i_2 \\ &= \left( \frac{1}{jR_1 C_0 \omega} + 1 \right) \frac{u_s}{\frac{1}{jC_0 \omega} + R_2} \end{aligned}$$

En réarrangeant tout ceci, on arrive bien à l'expression demandée.

5. L'impédance d'une bobine est  $Z = jL\omega$ , soit donc une relation du type  $\underline{u}_s = jL\omega \underline{i}$ .

Or ici on a  $R_1 C_0 j\omega \underline{u}_s + \underline{u}_s = R_1 R_2 C_0 j\omega \underline{i} + R_1 \underline{i}$ .

Il faut donc que  $R_1 C_0 j\omega \ll 1$  pour que le membre de gauche soit  $R_1 C_0 j\omega \underline{u}_s + \underline{u}_s \simeq \underline{u}_s$ .

Et d'autre part il faut que  $R_1 R_2 C_0 j\omega \gg R_1$ , soit donc  $R_2 C_0 j\omega \gg 1$ , pour que le membre de droite soit  $R_1 R_2 C_0 j\omega \underline{i} + R_1 \underline{i} \simeq R_1 R_2 C_0 j\omega \underline{i}$ .

Ainsi, sous la double condition  $\frac{1}{R_2 C_0} \ll \omega \ll \frac{1}{R_1 C_0}$ , on a la relation approchée  $\underline{u}_s = R_1 R_2 C_0 j \omega \underline{i}$ .

En posant  $L = R_1 R_2 C_0$ , on a bien  $\underline{u}_s = j L \omega \underline{i}$ .

Pour choisir les valeurs des composants, prenons  $\omega_0 = 1.0 \times 10^3 \text{ rad/s}$ ,  $L = R_1 R_2 C_0 = 1 \text{ H}$  et  $C_0 = 10^{-6} \text{ F}$ . Il faut donc  $R_1 R_2 = L / C_0 = 10^6 \Omega^2$ .

Il faut alors  $R_2 \gg \frac{1}{\omega C_0} = \frac{1}{2\pi \times 50 \times 10^{-6}} = 3.2 \times 10^3 \Omega$ ,

et  $R_1 \ll \frac{1}{\omega C_0} = \frac{1}{2\pi \times 300 \times 10^{-6}} = 5.3 \times 10^2 \Omega$ .

(À chaque fois on a pris la fréquence la plus contraignante pour l'inégalité entre 50 et 300 Hz, car on veut que le montage fonctionne au moins dans cette plage là.)

$R_1 = 10^2 \Omega$  et  $R_2 = 10^4 \Omega$  conviennent.

## 1.4 Mesure de longueur d'onde à l'aide du dispositif des trous d'Young

## 1.5 Induction (moteur à courant continu)

### 1.5 – Coup de pouce : Rappels sur le moteur à courant continu

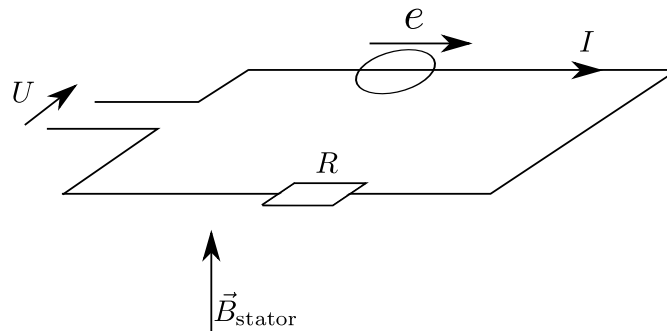
#### - Rotor et stator :

- Le stator, partie fixe liée au bâti. Des aimants permanents ou un enroulement de fil parcouru par un courant produisent un champ magnétique  $\vec{B}(M)$  fixe.

Dans le cas de l'enroulement de fil on parle de circuit inducteur.

- Le rotor, partie qui tourne et liée à l'arbre en rotation. Il comporte un ensemble de spires qui sont alimentées par la tension  $U$ , et donc parcourues par un courant  $i$ . Un fil parcouru par un courant  $i$  dans un champ  $\vec{B}$  subi une force de Laplace, et c'est précisément ceci qui fait tourner le rotor.

Le circuit électrique constitué des spires du rotor est appelé l'induit.



#### - Couple électromagnétique (forces de Laplace) :

L'action des forces de Laplace s'obtient en intégrant la force  $dF_{Lapl} = i \vec{dl} \wedge \vec{B}$  le long des spires de l'induit. Certains exercices peuvent faire effectuer ce calcul dans des situations simplifiées. Dans tous les cas, on aboutit à une expression de la forme suivante pour le couple résultant des actions de Laplace (aussi appelé couple électromagnétique) :

$$\Gamma_{em} = K \times i,$$

avec  $K$  une constante qui dépend du moteur (nombre de spires, géométrie), et qui est proportionnelle au champ  $\vec{B}$  produit par le stator.

On rencontre parfois la notation  $\Gamma_{em} = k\Phi \times i$ , avec  $k$  une constante et  $\Phi$  le flux maximal du champ magnétique produit par le stator à travers le circuit de l'induit.

#### - Force électromotrice induite :

Le rotor qui tourne constitue un circuit qui bouge dans un champ magnétique fixe : il y a donc création d'une force électromotrice  $e$  dans ce circuit. On la considère en convention générateur comme sur le schéma électrique équivalent ci-dessus. Pour la déterminer, on peut soit utiliser la loi de Faraday  $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ , soit plus simplement utiliser la relation entre puissance mécanique des forces de Laplace et puissance électrique associée à la fem :

$$\mathcal{P}_{Lapl} + \mathcal{P}_{fem} = 0,$$

avec  $\mathcal{P}_{Lapl} = \text{couple} \times \text{vitesse angulaire} = \Gamma_{em}\omega$ , et  $\mathcal{P}_{fem} = e \times i$ .

On a donc  $ei = -\Gamma_{em}\omega = -K\omega$ , d'où la fem

$$e = -K\omega.$$

#### - Équation électrique :

On effectue une loi des mailles sur le circuit électrique équivalent :  $U = -e + Ri$ . On a donc

$$U = K\omega + Ri.$$

#### - Équation mécanique :

On applique le théorème du moment cinétique au {rotor+arbre}, dont on note  $J$  le moment d'inertie total par rapport à son axe de rotation. Les couples à prendre en compte sont le couple électromagnétique ( $> 0$  pour un moteur, c'est lui qui produit la rotation) et le couple résistif total  $\Gamma_r$  ( $< 0$ , il représente les forces de frottement et le couple à fournir pour entraîner la charge voulue) :

$$J \frac{d\omega}{dt} = \Gamma_{em} + \Gamma_r, \quad \text{soit} \quad \boxed{J \frac{d\omega}{dt} = K i + \Gamma_r.}$$

Et en régime permanent on a  $\frac{d\omega}{dt} = 0$ .

### Correction

1.  $\mathcal{P}_{Lapl} + \mathcal{P}_{fem} = 0$ .

On a de plus  $\mathcal{P}_{Lapl} = \text{couple} \times \text{vitesse angulaire} = \Gamma_{em}\omega$ , et  $\mathcal{P}_{fem} = e \times i$ .

On a donc  $ei = -\Gamma_{em}\omega = -K i \omega$ , d'où la fem  $\boxed{e = -K \omega}$ .

2.  $\star$  Le schéma électrique équivalent du circuit de l'induit est le suivant :

La loi des mailles indique donc que  $U + e = Ri$ , soit donc que  $\boxed{U = K\omega + Ri}$ , ce qui est l'équation électrique.

$\star$  Pour obtenir l'équation mécanique on applique le théorème du moment cinétique à l'arbre en rotation :

$$J \frac{d\omega}{dt} = \Gamma_{em} + \Gamma_r, \quad \text{soit} \quad \boxed{J \frac{d\omega}{dt} = K i + \Gamma_r.}$$

3. Traduisons en équations les différents essais :

- Essai 1 :  $U_1 = K\Omega_1 + RI_1$  et  $0 = KI_1 + \Gamma_{r,n}$ .
- Essai 2 :  $U_2 = K\Omega_2 + RI_2$  et  $0 = KI_2 + \Gamma_{r,vide}$ .
- Essai 3 :  $U = K\omega + Ri$  et  $J \frac{d\omega}{dt} = Ki + \Gamma_{r,n}$ .

Si on soustrait les deux équations électriques des essais 1 et 2, on obtient  $U_1 - U_2 = R(I_1 - I_2)$ , d'où

$$\boxed{R = \frac{U_1 - U_2}{I_1 - I_2} = 1.4 \times 10^2 \Omega.}$$

On a ensuite  $\boxed{K = \frac{U_1 - RI_1}{\Omega_1} = 0.89 \text{ V} \cdot \text{s}}$  (pour l'A.N. penser à convertir les tour/min).

Puis  $\boxed{\Gamma_{r,n} = -KI_1 = -3.8 \text{ N} \cdot \text{m}}$  (négatif car c'est un couple résistif)

et  $\boxed{\Gamma_{r,vide} = -KI_2 = -0.17 \text{ N} \cdot \text{m}}$ .

Pour trouver  $J$  il faut utiliser l'essai 3. On manipule les équations électrique et mécanique :

$$J \frac{d\omega}{dt} = K i + \Gamma_r = K \frac{U - K\omega}{R} + \Gamma_{r,n}, \quad \text{soit} \quad \frac{d\omega}{dt} + \frac{K^2}{JR} \omega = \frac{KU}{JR} + \frac{\Gamma_{r,n}}{J}.$$

Cette dernière équation s'intègre en  $\omega(t) = \lambda e^{-t/\tau} + \frac{KU}{RJ} + \frac{R\Gamma_{r,n}}{J}$  avec  $\boxed{\tau = JR/K^2}$ .

On sait alors que l'on atteint 90% de la valeur du régime permanent au bout de  $\Delta t = 2.3\tau$ .

On isole donc  $\boxed{J = \frac{K^2 \Delta t}{R \cdot 2.3} = 6.8 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.}$

4. Le rendement est  $\eta = \frac{\text{puissance mécanique sur l'arbre}}{\text{puissance électrique fournie}} = \frac{|\Gamma_r \Omega|}{UI}$ .

On prend les valeurs numériques de l'essai 1 (correspondant à la charge nominale) :  $\boxed{\eta = 0.70}$ .

## 1.6 Induction (moteur asynchrone)

### Correction

1. a. Le couple provient des actions des forces de Laplace sur la spire. Il y a présence de ces forces car le cadre est parcouru par un courant  $i$  et est plongé dans un champ magnétique.

(Et il y a présence d'un courant car le champ magnétique tourne, donc le flux de  $\vec{B}$  à travers le cadre varie, ce qui induit une fem  $e$  dans la spire, et donc un courant car la spire est fermée sur elle même.)

b.  $\Phi(t) = \vec{B} \cdot \vec{n}S = B_0S \cos \Omega t.$

Ceci induit une fem  $e(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = B_0S\Omega \sin \Omega t.$

On a un circuit électrique équivalent avec le générateur  $e$  (en convention générateur donc), une résistance  $R$  et une bobine  $L$ . D'où l'équation

$$e(t) = Ri(t) + L\frac{di}{dt}.$$

2. Il faut  $\Gamma_m > 0$  pour avoir un couple moteur, et il faut donc  $\omega < \omega_s$ . Ceci se comprend car alors la spire tourne plus lentement que le champ magnétique, et tend donc à le rattraper afin d'annuler les variations de  $\vec{B}$  dans son référentiel. D'où un couple positif qui tend à l'accélérer.

La valeur du couple lorsque  $\omega$  tend vers 0 est le couple développé lors du démarrage du moteur.

3. a.  $J\frac{d\omega}{dt} = \Gamma_m(\omega) - \Gamma_r.$

b. Au démarrage il faut  $\Gamma_m(0) > \Gamma_r$ , car ainsi  $\frac{d\omega}{dt} > 0$  et  $\omega$  augmente.

c. En régime permanent on a  $0 = J\frac{d\omega}{dt} = \Gamma_m(\omega) - \Gamma_r$ , et donc  $\Gamma_m(\omega) = \Gamma_r$ . Les valeurs possibles pour  $\omega$  sont données par l'intersection entre la courbe  $\Gamma(\omega)$  et la courbe  $\Gamma_r$ .

Pour le moteur 1 on voit qu'il y a deux solutions.

★ Considérons la plus grande : on se place donc en  $\omega^*$  tel que  $\Gamma_m(\omega^*) = \Gamma_r$

Supposons que suite à une perturbation,  $\omega$  augmente légèrement et prenne une valeur  $\omega^+ > \omega^*$ . Alors la courbe  $\Gamma(\omega^+)$  passe en dessous de la courbe  $\Gamma_r$  : on a donc  $\Gamma_m(\omega^+) - \Gamma_r < 0$ , et donc  $\frac{d\omega}{dt} < 0$  d'après le TMC. Donc  $\omega$  diminue. Donc  $\omega$  retourne vers la valeur initiale  $\omega^*$ .

On peut faire le même raisonnement en supposant que  $\omega$  diminue légèrement et prend une valeur  $\omega^- < \omega^*$ . Alors  $\Gamma_m(\omega^-) - \Gamma_r > 0$  et donc  $\frac{d\omega}{dt} > 0$  et donc  $\omega$  augmente et rejoint la valeur initiale  $\omega^*$ .

Il s'agit bien d'un comportement stable.

★ Si on considère maintenant le point d'intersection le plus à gauche, le même type de raisonnement montre que si  $\omega$  augmente, alors  $\frac{d\omega}{dt} > 0$  et  $\omega$  augmente encore : il s'agit d'un comportement instable.

4. a.  $\mathcal{P}_m = \Gamma_m\omega = \frac{(B_0S)^2}{2L} \frac{RL\Omega\omega}{R^2 + (L\Omega)^2}.$

$$\mathcal{P}_J = R\langle i(t)^2 \rangle = R \times \frac{1}{2} |I_m|^2 = \frac{1}{2} \frac{R(B_0S\Omega)^2}{R^2 + (L\omega)^2}$$

On trouve  $\eta = \frac{\mathcal{P}_m}{\mathcal{P}_{\text{él}}} = \frac{\omega}{\omega_s}.$

b. Si  $\omega = 0.95\omega_s$ , alors le rendement est de 95%.

## 1.7 Induction (moteur synchrone)

1.7 – Coup de pouce : Le couple fourni par le moteur est  $\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B} = \mathcal{M}B \sin \theta \vec{e}_z$ .

Correction

1. Pour un moteur synchrone on a  $\omega = \omega'$ . L'angle  $\theta = (\vec{\mathcal{M}}, \vec{B})$  est donc constant une fois le régime permanent atteint.

2. Le couple fourni par le moteur est  $\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B} = \mathcal{M}B \sin \theta \vec{e}_z$ .

À vide, le couple fourni est nul, donc  $\theta = 0$ .

Dans le deuxième cas, on a  $\mathcal{M}B \sin \theta = \Gamma_c$ , d'où  $\theta = \arcsin \frac{\Gamma_c}{\mathcal{M}B} = 0.42 \text{ rad} = 24^\circ$ .

La puissance fournie par le moteur est  $\mathcal{P} = \Gamma_c \times \omega = 0.65 \times (50 \times 2\pi) = 2.0 \times 10^2 \text{ W}$ .

3. La vitesse de rotation ne dépend pas de la charge. Elle est toujours donnée par la vitesse de rotation du champ produit par le stator (50 tours par seconde ici). C'est un des avantages du moteur synchrone.

On a  $\Gamma = \mathcal{M}B \sin \theta$ . Le couple maximal est donc obtenu pour  $\theta = \pi/2$ , et donc  $\Gamma_{\max} = \mathcal{M}B = 16 \text{ N} \cdot \text{m}$ .

## 1.8 PT 2015, mécanique (machine d'Atwood)

Correction

Indices : il faut appliquer le PFD à la masse 1, puis à la masse 2. Puis appliquer le TMC à la poulie.

1.

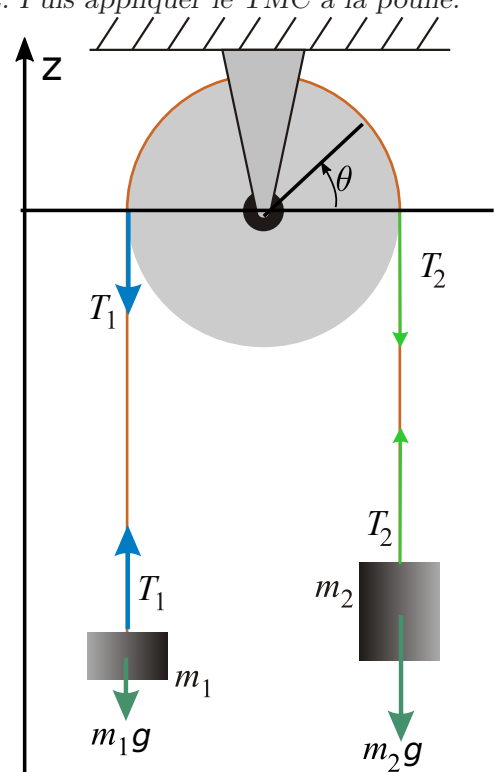
2. PFD à la masse 1 :  $m_1 \ddot{z}_1 = T_1 - m_1 g$  (il ne faut donc pas dire que  $T_1 = m_1 g$ ).

PFD à la masse 2 :  $m_2 \ddot{z}_2 = T_2 - m_2 g$ , et on a  $\ddot{z}_2 = -\ddot{z}_1$  car fil inextensible.

La tension  $T_1$  est identique au niveau de la poulie à gauche et de la masse 1 car le fil est de masse nulle (un pfd à cette portion de fil donne  $0 = T_{1 \text{ en haut}} - T_{1 \text{ en bas}}$ ). Idem pour  $T_2$ .

TMC à la poulie projeté sur son axe de rotation :  $J\ddot{\theta} = T_1 R - T_2 R$ . Pour la question 1 on a  $J = 0$  et donc  $T_1 = T_2$ . Mais on considère ici le cas général.

On a également  $R\dot{\theta} = -\dot{z}_1$  et  $R\ddot{\theta} = -\ddot{z}_1$  car le fil ne glisse pas sur la poulie.



En retranchant les deux PFD on obtient :

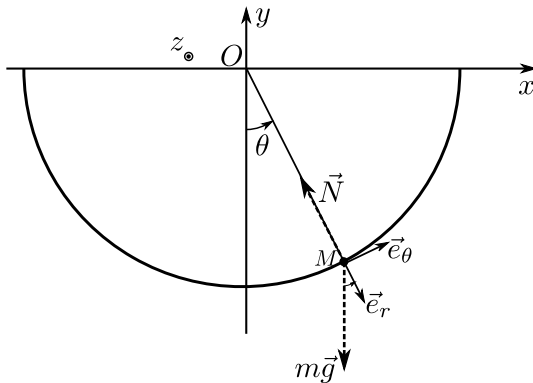
$$m_1 \ddot{z}_1 - m_2 (-\ddot{z}_1) = T_1 - T_2 - m_1 g + m_2 g = \left( -\frac{J}{R^2} \ddot{z}_1 \right) + (m_2 - m_1) g, \text{ d'où } \ddot{z}_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + J/R^2} g.$$



## 1.9 TSI CCP 2015, bille dans demi-sphère -> révision coordonnées cylindriques

### Correction

1.



Le mouvement est dans le plan de la figure. On utilise les **coordonnées cylindriques** d'axe  $z$  (dont le centre est le centre de la demi sphère). C'est-à-dire les vecteurs  $\vec{e}_r$ ,  $\vec{e}_\theta$ ,  $\vec{e}_z$  tels que sur le schéma.

Bilan des forces :

- pesanteur  $m\vec{g} = -mg\vec{e}_z = mg(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta)$
- réaction du support  $\vec{N} = -\|\vec{N}\|\vec{e}_r$ .

On utilise les coordonnées cylindriques précisément parce que la réaction du support s'exprime simplement dans cette base.

2. Se souvenir que  $\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r$ ,  $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ , et  $\vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r$  (se retrouve en dérivant une fois puis deux fois  $R\vec{e}_r$ , sachant que  $\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$  et  $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_r$ ).

Dans le référentiel d'étude supposé galiléen, on utilise le principe fondamental de la dynamique :  $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$ , soit

$$m(R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r) = mg(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta) - \|\vec{N}\|\vec{e}_r.$$

On remarque bien qu'on a tout exprimé dans la base cylindrique  $\vec{e}_r$ ,  $\vec{e}_\theta$ , ce qui est plus pratique car en projetant sur  $\vec{e}_\theta$  on peut éliminer la réaction du support (qui est inconnue).

On a donc, en projection sur  $\vec{e}_\theta$  :

$$mR\ddot{\theta} = -mg\sin\theta, \quad \text{soit} \quad \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta = 0.}$$

3. On est obligé de linéariser pour les angles petits afin de pouvoir résoudre. Donc on a  $\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\theta = 0$ , ce qui est une équation du type oscillateur harmonique.

Les solutions sont donc  $\theta(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$ , avec  $\boxed{\omega_0 = \sqrt{g/R}}$ , et  $A$  et  $B$  des constantes.

Si par exemple à  $t = 0$  on a  $\dot{\theta} = 0$  et  $\theta = \theta_0$ , alors  $\boxed{\theta(t) = \theta_0 \cos\omega_0 t.}$

4. On reprend le PFD, mais cette fois projeté sur  $\vec{e}_r$  : on a  $-mR\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - \|\vec{N}\|$ .

Pour des angles petits on peut utiliser  $\cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$ .

On a alors, en remplaçant  $\theta$  par  $\theta(t) = \theta_0 \cos\omega_0 t$  :  $\|\vec{N}\| = mg + mR\theta_0^2\omega_0^2 \sin^2\omega_0 t - \frac{mg\theta_0^2}{2} \cos^2\omega_0 t$ .

5. L'énergie mécanique est  $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$  avec  $y$  l'altitude de la bille.

Or  $v^2 = (R\dot{\theta})^2$  et  $y = -R\cos\theta$ .

Donc  $\boxed{E_m = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - mgR\cos\theta.}$

6. L'énergie mécanique se conserve car les forces s'appliquant sur la bille sont soit conservatives (le poids, qui dérive de l'énergie potentielle  $mgy$ ), soit ne travaillent pas (la réaction du support, car elle est perpendiculaire au mouvement, donc son travail  $\vec{N} \cdot \vec{v}dt = 0$ ).

Ceci permettrait de retrouver l'équation du mouvement :

$$0 = \frac{dE_m}{dt} = \frac{1}{2}mR^2 \times 2\ddot{\theta}\dot{\theta} - mgR \times \dot{\theta}(-\sin \theta),$$

donc on retrouve bien  $\ddot{\theta} + \frac{g}{R} \sin \theta = 0$ .

7. Moment de la réaction du support, calculé en  $O$  :  $\vec{M}_O(\vec{N}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{N} = \vec{0}$ .

Moment du poids, calculé en  $O$  :

$$\vec{M}_O(m\vec{g}) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{g} = R\vec{e}_r \wedge mg(\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta) = -Rmg \sin \theta \vec{e}_z.$$

$$\text{Moment cinétique en } O : \vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = R\vec{e}_r \wedge mR\dot{\theta}\vec{e}_\theta = mR^2\dot{\theta} \vec{e}_z.$$

Théorème du moment cinétique :  $\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \vec{M}_O(m\vec{g}) + \vec{M}_O(\vec{N})$ , soit donc  $mR^2\ddot{\theta} = -Rmg \sin \theta$ , c'est-à-dire encore la même chose que tout à l'heure.

8. À chacun de voir...