

Exercices d'entraînement à l'oral

– Corrections –

Sommaire	1
1 Élec : Divers 1 ^{re} année	2
2 Élec : Montages avec un ALI	3
3 Élec : Oscillateurs	5
4 Therm : Statique des fluides	7
5 Therm : Révisions de 1 ^{re} année	10
6 Therm : Transformations infinitésimales	13
7 Therm : Changements d'état et diagrammes	17
8 Therm : Viscosité et relation de Bernoulli	20
9 Therm : Systèmes ouverts	23
10 Therm : Transferts thermiques par conduction	27
11 Opt : Optique géométrique	30
12 Opt : Introduction à l'optique ondulatoire	31
13 Opt : Interférences à deux ondes	33
14 Opt : Interférences à N ondes, réseaux	37
15 EM : Induction	40
16 ÉM : Électrostatique	41
17 ÉM : Magnétostatique	43
18 ÉM : Équations de Maxwell, énergie	46
19 ÉM : Ondes	48
20 Chi : Chimie des solutions (1 ^{re} année)	51
21 Chi : 1 ^{er} principe ; Équilibre chimique	53
22 Chi : Diagrammes E-pH	60
23 Mécanique	63

Électronique : Divers 1^{re} année

1.1 Décharge dans un circuit RLC

[●○○]

1.1 – Correction

1. Le courant traversant une bobine est continu, donc $i(t = 0^+) = i(t = 0^-) = 0$. La tension aux bornes d'un condensateur est continue, donc $u_c(t = 0^+) = u_c(t = 0^-) = U_0$.

En régime permanent les grandeurs sont stationnaires, donc la bobine se comporte comme un fil et le condensateur comme un interrupteur ouvert. On a donc $i = 0$ et $u_c = 0$ (faire le schéma).

2. Comme la grandeur mesurée est nulle à $t = 0$, il s'agit du courant $i(t)$. On peut le mesurer en mesurant la tension aux bornes de la résistance.

3. On arrive à
$$\frac{d^2i}{dt^2} + 2m\omega_0 \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0.$$

L'équation caractéristique est $x^2 + 2m\omega_0 x + \omega_0^2 = 0$, de discriminant $\Delta = 4\omega_0^2(m^2 - 1) < 0$, le régime est donc pseudo-périodique.

4. Ω est la pseudo-période des oscillations. On peut la mesurer en relevant la période T des oscillations sur le signal.

$i(t = 0) = 0$ donc $A = 0$. Pour B on utilise $\frac{di}{dt} = \frac{u_L}{L}$ avec u_L la tension aux bornes de la bobine qui vaut, à $t = 0$, $-U_0$ (faire une loi des mailles à $t = 0^+$).

Or $\frac{di}{dt}(t = 0) = \Omega B$. On a donc
$$B = \frac{U_0}{L\Omega}.$$

5. Si l'amortissement m est faible (ce qui semble être le cas sur la figure), alors on peut supposer que le signal est maximal lorsque le sinus l'est.

Ainsi le premier maximum est pour $\Omega t_1 = \pi/2$, et alors $y_1 = i(t_1) = B \exp -m\omega_0 t_1$.

Le second maximum est pour $\Omega t_2 = \pi/2 + 2\pi$, et alors $y_2 = i(t_2) = B \exp -m\omega_0 t_2$.

On a donc $\frac{y_1}{y_2} = \exp -m\omega_0(t_1 - t_2) = \exp \left\{ -m\omega_0 \frac{-2\pi}{\Omega} \right\} = \exp \left\{ 2\pi \frac{m}{\sqrt{1 - m^2}} \right\}$.

Et si m petit devant 1 on peut négliger m^2 devant 1.

6. Il faut une source d'énergie, en utilisant par exemple un ALI, afin de réaliser un montage oscillateur. On peut penser par exemple au montage à résistance négative.

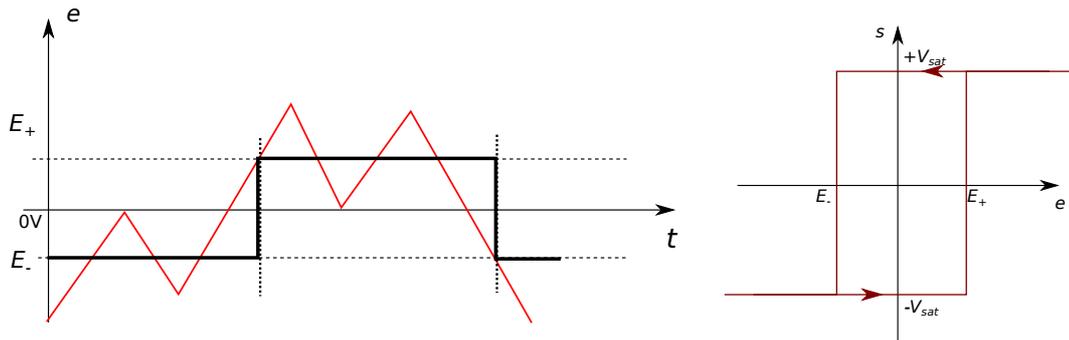
Électronique : Montages avec un ALI

2.1 Question de cours – Montages à ALI

[○○○]

2.1 – Correction

1. Comparateur à hystérésis non inverseur.
- 2.

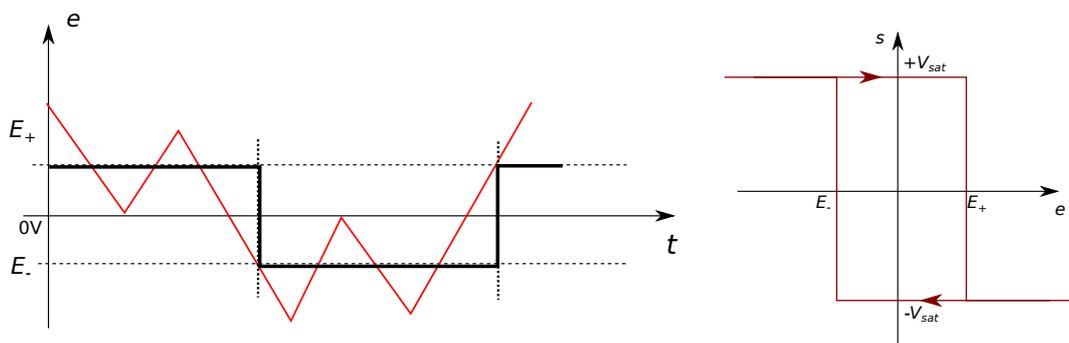


2.2 Question de cours – Montages à ALI

[○○○]

2.2 – Correction

1. Comparateur à hystérésis inverseur.
- 2.



2.3 Question de cours – Montages à ALI

[●○○]

2.3 – Coup de pouce : Il faut montrer qu'il s'agit d'un comparateur à hystérésis inverseur.
Méthode à suivre :

- Justifier que $v_+ = s \frac{R_2}{R_1 + R_2}$.
- Supposer que $v_+ = +V_{sat}$. Alors $v_+ = V_{sat} \frac{R_2}{R_1 + R_2}$. Reste vrai tant que $v_- < v_+$, ce qui est $\Leftrightarrow e < V_{sat} \frac{R_2}{R_1 + R_2} = E_+$.

- Supposer que $v_+ = -V_{sat}$. Alors $v_+ = -V_{sat} \frac{R_2}{R_1 + R_2}$. Reste vrai tant que $v_- > v_+$, ce qui est $\Leftrightarrow e > -V_{sat} \frac{R_2}{R_1 + R_2} = E_-$.
- Tracer la caractéristique s en fonction de e . Pour cela partir d'un point où $s = v_+ = +V_{sat}$ et $e \ll E_-$, puis e augmente, et s bascule lorsque e passe au dessus de E_+ .
Faire ensuite décroître e : s bascule à nouveau lorsque e passe en dessous de E_- .
On arrive à la même chose qu'à l'exercice 2.2

2.4 Étude d'un filtre déphaseur

[●○○]

2.4 – Coup de pouce : $\underline{H} = -\frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega}$

2.5 Étude d'un pseudo-intégrateur

[●○○]

2.5 – Coup de pouce : $\underline{H} = -\frac{R'}{R} \frac{1}{1 + jR'C\omega}$

2.5 – Correction

1. $\underline{H} = -\frac{R'}{R} \frac{1}{1 + jR'C\omega}$

2. $|\underline{H}| = \frac{R'}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + (R'C\omega)^2}}$, $\varphi = \arg\left(-\frac{R'}{R}\right) - \arg(1 + jR'C\omega) = \pi - \arctan(R'C\omega)$.

2.6 Étude d'un amplificateur différentiel

[●○○]

2.6 – Coup de pouce : Étudier d'abord le bloc 1. À la fin, $V_s = (1 + \alpha)(V_2 - V_1)$.

2.7 Étude d'un montage soustracteur

[●○○]

2.7 – Coup de pouce : $V_s = \frac{R_2}{R_1}(V_2 - V_1)$.

2.8 Étude d'une résistance négative

[●●○]

2.8 – Coup de pouce : $e = -\frac{R_1 R_0}{R_2} i_e$

Électronique : Oscillateurs

3.1 Oscillateur à résistance négative avec RLC parallèle

[●●○]

3.1 – Coup de pouce : 1 – $e = -\frac{R_1 R_0}{R_2} i_e$. 3 – On peut passer par la notation complexe puis revenir dans le domaine temporel, ou bien établir directement l'équation avec les notations réelles (utiliser une loi des nœuds). Dans les deux cas, on doit aboutir à : $\frac{d^2 e}{dt^2} + \frac{1}{C} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_N} \right) \frac{de}{dt} + \omega_0^2 e = 0$.

3.2 Exercice : oscillateur à cellule LC

[●○○]

3.2 – Coup de pouce : 2 – $\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{ds}{dt} + \frac{1}{LC} s = \frac{K}{RC} \frac{de}{dt}$.

3.2 – Correction

1. Hautes fréquences : le condensateur se comporte comme un fil, donc $s = 0$. Basses fréquences : la bobine se comporte comme un fil, donc $s = 0$. Il s'agit donc d'un filtre passe-bande.
2. On utilise les relations complexes. Diviseur de tension entre \underline{u} et \underline{s} :

$$\underline{s} = \underline{u} \frac{\underline{Z}_{eq}}{R + \underline{Z}_{eq}} = K \times e \frac{1}{1 + R/\underline{Z}_{eq}},$$

avec $\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = jC\omega + \frac{1}{jL\omega}$. Donc

$$\underline{s} = K e \frac{1}{1 + jRC\omega + \frac{R}{jL\omega}} = K e \frac{jL\omega}{jL\omega - RLC\omega^2 + R},$$

d'où $(jL\omega - RLC\omega^2 + R) \underline{s} = K e jL\omega$.

En notation réelle ceci donne : $L\dot{s} + RLC\ddot{s} + R s = K L \dot{e}$,

soit encore $\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{ds}{dt} + \frac{1}{LC} s = \frac{K}{RC} \frac{de}{dt}$.

3. On a alors $s(t) = e(t)$, et l'équation devient

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{1}{RC} (1 - K) \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

- $K < 1$: Tous les coefficients sont de même signe, les solutions sont donc stables. Le signal $s(t)$ reste nul. L'amplification K n'est donc pas suffisante.
- $K = 1$: L'équation différentielle est celle d'un oscillateur harmonique. Les solutions sont du type $s(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ et sont donc exactement sinusoïdales à la pulsation ω_0 .
- $K > 1$: Les coefficients ne sont pas tous de même signe : les solutions sont instables. L'équation différentielle prévoit donc que $s(t)$ oscille avec une amplitude qui croît vers l'infini.

Mais ce n'est pas le cas en pratique : l'amplitude des oscillations fini par se stabiliser à une valeur finie, à cause de saturations (tensions de saturations des ALI s'il y en a). On a alors deux cas :

- Si $K \gg 1$, le signal est oscillant et très déformé.
- Si $K > 1$ n'est pas très éloigné de 1, alors les oscillations seront quasi-sinusoïdales, peu déformées, avec une pulsation ω_0 .

3.3 Oscillateur astable I-2I

[●●○]

3.3 – Coup de pouce : Interrupteur en position 1 : le courant i dans le condensateur (en convention récepteur par rapport à la tension u) est donné par la loi des nœuds $2I_0 = i + I_0$, donc $i = I_0$. Interrupteur en position 2 : cette fois on a $i = -I_0$.

Ensuite penser à $i = C \frac{du}{dt}$ que l'on intègre facilement car i est constant.

Question 5, il faut trouver $T = 4u_0C/I_0$.

3.4 Limite en fréquence d'un oscillateur utilisant un ALI

[●○○]

3.4 – Correction

- 1 - Le slew rate est la pente maximale (en valeur absolue), en tension, que peut produire l'ALI en sortie. C'est-à-dire qu'ici, la tension de sortie ne peut pas varier plus rapidement que de 15 V par μs .
- 2 - On peut se fixer comme limite le moment où le signal sera complètement triangulaire : une rampe de montée au rythme de $15 \text{ V} \cdot \mu\text{s}^{-1}$ pour passer de $-V_{\text{sat}}$ à $+V_{\text{sat}}$, puis une rampe de descente à $-15 \text{ V} \cdot \mu\text{s}^{-1}$ pour redescendre de $+V_{\text{sat}}$ à $-V_{\text{sat}}$.

Si on prend $V_{\text{sat}} = 15 \text{ V}$, il faut $2 \mu\text{s}$ pour la rampe de montée, et autant pour la descente, soit une période minimale de $4 \mu\text{s}$.

La fréquence maximale est donc de 250 kHz.

Thermodynamique : Statique des fluides

4.1 Question de cours – Force s'exerçant sur un barrage

[●●○]

4.1 – Correction

1. $F = p_0 \times HL$ dirigée de l'air vers le barrage.
2. Plaçons un axe z vers le bas. L'eau est immobile, on peut donc utiliser la relation de la statique des fluides : $\frac{dp}{dz} = \rho g$.

On suppose l'eau incompressible indilatable, donc ρ est constante, et l'équation précédente s'intègre facilement en $p(z) = \rho g z + A$ avec A une constante.

On détermine A en sachant qu'en $z = 0$ on a $p = p_0$. Donc dans l'eau, $p(z) = p_0 + \rho g z$.

Ensuite, la résultante des forces exercées par l'eau sur le barrage s'écrit (avec \vec{e}_y un vecteur unitaire allant de l'eau vers le barrage) :

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \iint_{S_{\text{barrage}}} p dS \vec{e}_y \\ &= \int_{z=0}^H \int_{x=0}^L p(z) dx dz \vec{e}_y \\ &= \int_{z=0}^H \int_{x=0}^L (p_0 + \rho g z) dx dz \vec{e}_y \\ &= p_0 LH + \rho g \frac{H^2}{2}.\end{aligned}$$

3. Avec \vec{e}_z vers le bas et \vec{e}_y vers la droite sur le schéma de l'énoncé, le vecteur normal à la face inclinée (et dirigé de l'air vers le barrage) est $\vec{n} = \cos \alpha \vec{e}_z - \sin \alpha \vec{e}_y$.

Notons $d = \sqrt{e^2 + H^2}$ la longueur de la face inclinée.

On a $\cos \alpha = e/d$ et $\sin \alpha = H/d$.

La résultante des forces de pression exercées par l'air sur le barrage est $\vec{F} = p_0 L d \vec{n} = p_0 L d (\cos \alpha \vec{e}_z - \sin \alpha \vec{e}_y) = p_0 L e \vec{e}_z - p_0 L H \vec{e}_y$.

4.2 Question de cours – Atmosphère isotherme

[●○○]

4.2 – Coup de pouce : Démonstration du cours. Il faut arriver à $p(z) = p_0 \exp(-z/H)$ avec $H = RT/(Mg)$.

4.3 Iceberg

[●○○]

4.3 – Coup de pouce : Il est raisonnable de négliger la poussée d'Archimède exercée par l'air, et de ne tenir compte que de celle exercée par l'eau. On arrive à $\frac{V_2}{V_1} = \frac{\rho_e}{\rho_g} - 1$.

4.4 Tube en U avec deux liquides

[●○○]

4.4 – Correction

On note p_0 la pression atmosphérique.

Les liquides peuvent être supposés incompressibles, donc on a la relation $p = p_0 + \rho g z$ avec z la profondeur depuis la surface libre du liquide.

On sait que la pression à l'interface entre les fluides 1 et 2 est continue. Cette pression vaut :

- si on se place dans le liquide 2, $p_0 + \rho_2 g h_2$;
- si on se place dans le liquide 1, $p_0 + \rho_1 g h_1$.

On a donc $p_0 + \rho_1 g h_1 = p_0 + \rho_2 g h_2$, d'où $\rho_2 = \rho_1 \frac{h_1}{h_2}$.

4.5 Cube posé au fond d'un récipient

[●○○]

4.5 – Correction

1. Il faut que $\rho_c > \rho_e$ (ρ_e masse volumique de l'eau).
2. Hypothèses : fluide immobile, objet non en contact avec les parois. Le théorème indique que la résultante des forces de pression s'exerçant sur un objet immergé est égale à l'opposée du poids du fluide déplacé, donc à $-\rho_{\text{fluide}} V_{\text{objet}} \vec{g}$.

On ne peut pas l'appliquer ici car l'objet touche le fond du récipient.

3. Résultante des forces de pression :

- S'exerçant sur les faces latérales : les forces correspondantes se compensent et la résultante est nulle.
- S'exerçant sur la face supérieure : la résultante est $[p_0 + \rho_e g (H - h)] \times h^2$ dirigée vers le bas.

En notant \vec{e}_z un vecteur unitaire vers le haut, la résultante est donc

$$\vec{R} = -[p_0 + \rho_e g (H - h)] \times h^2 \vec{e}_z.$$

4. S'il y a de l'eau sous le cube, alors il y a également une résultante des forces de pression qui s'exercent sous le cube est qui est $+ [p_0 + \rho_e g H] \times h^2 \vec{e}_z$.

La résultante totale est donc $\vec{R} = [p_0 + \rho_e g H] \times h^2 \vec{e}_z - [p_0 + \rho_e g (H - h)] \times h^2 \vec{e}_z$, soit

$$\vec{R} = -\rho_e g h^3 \vec{e}_z.$$

Il s'agit bien de la formule d'Archimède (h^3 est le volume du cube). Et on peut effectivement l'appliquer dans ce cas là car il y a de l'eau sous le cube, donc il n'est pas en contact avec les parois.

4.6 Verre vide flottant sur l'eau

[●○○]

4.6 – Correction

On note ρ la masse volumique de l'eau, et z est dirigé vers le haut.

1. a. Référentiel galiléen, système {verre}, bilan des forces statique :

$$-mg\vec{e}_z + \rho(b-z)Ag\vec{e}_z = \vec{0}.$$

(On a utilisé la formule pour la poussée d'Archimède, ce qui est possible car le fluide est au repos et que l'objet ne touche pas les parois.)

On isole z , et on obtient $z_0 = b - \frac{m}{\rho A} = 5.0 \text{ cm}.$

- b. Principe fondamental de la dynamique : $-mg\vec{e}_z + \rho(b-z)Ag\vec{e}_z = m\ddot{z}\vec{e}_z.$

Qui se réécrit $\ddot{z} + \frac{\rho Ag}{m} z = \frac{\rho Agb}{m} - g.$

C'est une équation du type oscillateur harmonique : $\ddot{z} + \omega_0^2 z = cst.$ On identifie la pulsation du mouvement $\omega_0 = \sqrt{\frac{\rho Ag}{m}}$, soit une période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho Ag}} = 0.63 \text{ s}.$

2. On effectue encore un bilan des forces statique, mais cette fois la masse totale est $m + \rho hA$:

$$-(m + \rho hA)g\vec{e}_z + \rho(b-z)Ag\vec{e}_z = \vec{0}.$$

D'où $m + \rho hA = \rho(b-z)A.$

Le verre coule lorsque $z = 0.$ On a alors d'après l'équation précédente $m + \rho hA = \rho bA,$ et

donc $h = b - \frac{m}{\rho A} = 5.0 \text{ cm}.$

4.7 Pression dans l'eau compressible

[●●○]

4.7 – Correction

1. Cas incompressible : $p(z) = p_0 + \rho_0 g z.$

2. a. $\chi_T > 0$ car il faut que lorsque p augmente, alors ρ augmente.

- b. Relation de la statique des fluides : $\frac{dp}{dz} = \rho(z)g = \rho_0 g (1 + \chi_T(p(z) - p_0)),$ d'où

$$\frac{dp}{dz} = \rho_0 g \chi_T p(z) + (\rho_0 g - \rho_0 g \chi_T p_0).$$

On peut introduire $h = \frac{1}{\rho_0 g \chi_T}$ pour avoir une équation du type $\frac{dp}{dz} = \frac{p(z)}{h} + \dots$

- c. $p(z) = \lambda \exp(+z/h) + p_0 - \frac{1}{\chi_T},$ et on détermine λ avec $p(z=0) = p_0,$ d'où

$$p(z) = \frac{1}{\chi_T} \exp(+z/h) + p_0 - \frac{1}{\chi_T}.$$

- d. Pour $z \ll h,$ on a $\exp(+z/h) \simeq 1 + z/h.$ On retrouve alors $p(z) = p_0 + \rho_0 g z.$

On trouve $h = 200 \text{ km},$ ce qui montre que l'hypothèse incompressible pour l'eau est très bonne dans tous les océans terrestres.

4.8 Ballon atmosphérique

[●●○]

4.8 – Correction

1. Il faut montrer que $\rho = \frac{Mp}{RT} = \frac{Mp_0}{RT_0} (1 - z/L)^{\alpha-1}.$ On pose $\rho_0 = \frac{Mp_0}{RT_0}.$

2. Altitude maximale = $L \left(1 - \left(\frac{m_b}{\rho_0 V_b} \right)^{1/(1-\alpha)} \right) = 12 \text{ km}.$

Thermodynamique : Révisions de 1^{re} année

5.1 Compression : p' et T'

[●○○]

5.1 – Correction

1. La transformation étant rapide, on peut la supposer adiabatique (car les échanges de chaleur avec l'extérieur n'ont pas le temps de se faire).

Pour la suite, afin de pouvoir utiliser la loi de Laplace, on va également supposer la transformation réversible (on néglige tout frottement ou toute autre source d'irréversibilité).

Et on va utiliser le modèle du gaz parfait.

2. Avec toutes ces hypothèses on peut utiliser la loi de Laplace : $pV^\gamma = \text{cst}$ au cours de la transformation.

On a donc $p'V'^\gamma = p_0V_0^\gamma$, soit $p' = p_0 \left(\frac{V_0}{V'}\right)^\gamma = 66.3 \text{ bar}$. (on a pris $\gamma = 1.4$, valeur pour un gaz parfait diatomique).

Puis soit on utilise la loi des gaz parfaits pour avoir T' , soit on utilise Laplace sous la forme $p_0^{1-\gamma}T_0^\gamma = p'^{1-\gamma}T'^\gamma$.

Avec cette dernière on a $T' = T_0 \left(\frac{p'}{p_0}\right)^{1-1/\gamma} = 971 \text{ K} = 698^\circ\text{C}$.

(Attention à bien mettre la température T_0 en kelvin, sinon c'est faux.)

5.2 Compression et travail

[●○○]

5.2 – Coup de pouce : Dans les deux cas $p = p_{\text{ext}}$ à tout instant. On exprime $W = -\int_i^f p dV$.

1. Ici $p = nRT_0/V$.
2. Ici $p = p_0V_0^\gamma/V^\gamma$ (pourquoi?).

5.2 – Correction

1. Le travail reçu est $W = -\int_i^f p_{\text{ext}} dV$, et comme $p = p_{\text{ext}}$ (car quasi-statique sans frottements), on a $W = -\int_i^f p dV$.

On utilise la loi des gaz parfaits : $p = nRT_0/V$. T_0 est constante ici.

Enfin, on calcule $W = -\int_i^f \frac{nRT_0}{V} dV = -nRT_0 \ln \frac{V_f}{V_i} = p_0V_0 \ln \frac{V_i}{V_f} = p_0V_0 \ln 2$.

2. Ici aussi le travail reçu est $W = -\int_i^f p_{\text{ext}} dV$, avec $p = p_{\text{ext}}$ (car transformation réversible), d'où $W = -\int_i^f p dV$.

On a un gaz parfait, et une transformation adiabatique réversible, donc on peut utiliser la loi de Laplace : $pV^\gamma = \text{cst} = p_0V_0^\gamma$.

Donc $W = -\int_i^f \frac{p_0V_0^\gamma}{V^\gamma} dV = \frac{p_0V_0^\gamma}{\gamma-1} \left[\left(\frac{V_0}{2}\right)^{1-\gamma} - V_0^{1-\gamma} \right]$.

5.3 Création d'entropie et aliment

[●○○]

5.3 – Coup de pouce : Penser à : second principe, expression $S_{\text{éch}} = Q_{\text{reçu}}/T_{\text{ext}}$, premier principe pour déterminer $Q_{\text{reçu}}...$

5.3 – Correction

1. On applique le second principe au système {aliment} entre les états i et f :

$$\Delta S = S_e + S_c, \quad \text{avec } S_e = \frac{Q_{\text{reçu}}}{T_{\text{ext}}} = \frac{Q_{\text{reçu}}}{T_f}$$

car ici T_{ext} est la température de la pièce.

$$\text{On en déduit } S_c = mc \ln \frac{T_f}{T_i} - \frac{Q_{\text{reçu}}}{T_f}.$$

Pour exprimer $Q_{\text{reçu}}$ on applique le premier principe au système {aliment} entre les états i et f :

$$\Delta U = W + Q_{\text{reçu}}.$$

Or ici $W = 0$ car l'aliment est modélisé comme une phase condensée incompressible indilatable (son volume ne varie donc pas et les forces de pression ne travaillent donc pas). Et $\Delta U = mc(T_f - T_i)$, encore car il s'agit d'une phase condensée incompressible indilatable.

Au final, on a :

$$S_c = mc \ln \frac{T_f}{T_i} - \frac{mc(T_f - T_i)}{T_f} = 1.9 \text{ J/K.}$$

(Attention à bien prendre les températures en kelvins.)

5.4 Mélange d'eau

[●○○]

5.4 – Correction

1. ★ On suppose le mélange assez rapide pour pouvoir supposer la transformation adiabatique (les échanges d'énergie thermique avec l'extérieur sont ainsi négligés car trop lents).

Notons c la capacité thermique massique de l'eau, $m_1 = 500 \text{ g}$ la masse de boisson initiale (qu'on assimile à de l'eau), $T_1 = 100^\circ\text{C} = 373 \text{ K}$ sa température, $m_2 = 200 \text{ g}$ la masse d'eau du robinet ajoutée, et $T_2 = 20^\circ\text{C} = 293 \text{ K}$ sa température.

On modélise le liquide par une phase condensée incompressible indilatable.

★ On applique le premier principe au système fermé {boisson + eau du robinet} entre avant et après le mélange : $\Delta U = W + Q$. Or :

- $W = 0$ car phases condensées incompressibles indilatables.
- $Q = 0$ car ce système n'échange pas d'énergie thermique avec l'extérieur (l'hypothèse adiabatique).
- De plus, en notant T_f la température finale : $\Delta U = m_1c(T_f - T_1) + m_2c(T_f - T_2)$ (car la masse m_1 passe de T_1 à T_f , et la masse m_2 de T_2 à T_f).

On a donc $\Delta U = m_1c(T_f - T_1) + m_2c(T_f - T_2) = 0$, de quoi on déduit que

$$T_f = \frac{m_1T_1 + m_2T_2}{m_1 + m_2} = 77^\circ\text{C.}$$

2. On reprend $m_1c(T_f - T_1) + m_2c(T_f - T_2) = 0$, mais cette fois on cherche m_2 connaissant toutes les autres températures. On a ainsi

$$m_2 = m_1 \frac{T_1 - T_f}{T_f - T_2} = 3.0 m_1 = 1.5 \text{ kg},$$

soit un ajout de 1.5 L d'eau. Le problème est que le café sera un peu trop allongé...

Thermodynamique : Transformations infinitésimales en thermodynamique

6.1 Questions de cours

[○○○]

6.2 Refroidissement d'une bouteille d'eau

[○○○]

6.2 – Coup de pouce : Premier principe au système fermé {bouteille d'eau et son contenu} entre les instants t et $t + dt$: ...

6.2 – Correction Premier principe au système fermé {bouteille d'eau et son contenu} entre les instants t et $t + dt$: $dU = \delta W + \delta Q_{\text{reçu}}$.

Ici $\delta W = 0$ car on suppose le système indéformable, son volume ne varie donc pas et donc le travail des forces de pression est nul.

On a $dU = C dT$ car phase condensée incompressible indilatable.

Et $\delta Q_{\text{reçu}} = -aC(T(t) - T_{\text{ext}})dt$.

Donc finalement $C dT = -aC(T(t) - T_{\text{ext}})dt$, soit $\frac{dT}{dt} = -aT(t) + aT_{\text{ext}}$.

La solution de cette équation différentielle est $T(t) = \lambda e^{-at} + T_{\text{ext}}$ (solution de l'équation homogène + solution particulière).

On détermine la constante en écrivant $T(t = 0) = T_0$: $\lambda = T_0 - T_{\text{ext}}$. Finalement $T(t) = (T_0 - T_{\text{ext}}) e^{-at} + T_{\text{ext}}$.

Notons $T_f = 0^\circ\text{C}$. Il faut résoudre $T_f = (T_0 - T_{\text{ext}}) e^{-at} + T_{\text{ext}}$ pour trouver t .

On obtient $t = \frac{1}{a} \ln \frac{T_0 - T_{\text{ext}}}{T_f - T_{\text{ext}}} = 2.8 \times 10^3 \text{ s} = 46 \text{ min}$.

6.3 Chauffe-eau

[●○○]

6.3 – Coup de pouce : Penser à un premier principe entre t et $t + dt$.

6.3 – Correction

- ★ On utilise la donnée des "pertes statiques" : ceci signifie que l'eau du chauffe-eau cède au milieu extérieur une puissance $\mathcal{P}_{\text{pertes}} = 0.96 \text{ kWh}/24\text{h} = 0.96 \times \frac{10^3 \text{ W} \cdot \text{h}}{24 \text{ h}} = 40 \text{ W}$.

★ On applique le premier principe au système {eau dans le chauffe-eau} entre les instants t et $t + dt$:

$$dU = \delta W + \delta Q_{\text{reçu}} = \delta Q_{\text{reçu}} = -\mathcal{P}_{\text{pertes}} dt.$$

On a utilisé $\delta W = 0$ car le système est modélisé par une phase condensée incompressible indilatable.

D'autre part, pour une phase condensée incompressible indilatable on a $dU = mcdT$ (m est la masse d'eau, c la capacité thermique massique, donc $m \times c$ est la capacité thermique totale).

Finalement on a

$$mcdT = -\mathcal{P}_{\text{pertes}} dt, \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{dT}{dt} = -\frac{\mathcal{P}_{\text{pertes}}}{mc}}.$$

★ C'est une équation du type $f' = cst$, qui s'intègre facilement en $T(t) = -\frac{\mathcal{P}_{\text{pertes}}}{mc} \times t + A$ avec A une constante, que l'on détermine à l'aide de $T(t=0) = T_0 = 60^\circ\text{C}$. D'où $A = T_0$.

D'où

$$T(t) = T_0 - \frac{\mathcal{P}_{\text{pertes}}}{mc} \times t.$$

- On fait l'application numérique pour $T(t) - T_0$ avec $t = 24 \times 3600$ s, on trouve un abaissement de 8.2°C .
- Même bilan avec le premier principe que dans la question 1, mais cette fois il y a en plus un terme d'apport d'énergie thermique $\mathcal{P}_{\text{reçu}} = 1200$ W.

On a donc

$$T(t) = T'_0 + \frac{\mathcal{P}_{\text{reçu}} - \mathcal{P}_{\text{pertes}}}{mc} \times t,$$

avec T'_0 la nouvelle température initiale (qui est de $60^\circ\text{C} - 8.2^\circ\text{C}$).

Pour regagner les $\Delta T = 8.2^\circ\text{C}$ perdus, il faut un temps t tel que $\Delta T = \frac{\mathcal{P}_{\text{reçu}} - \mathcal{P}_{\text{pertes}}}{mc} \times t$, soit

$$t = \frac{m c \Delta T}{\mathcal{P}_{\text{reçu}} - \mathcal{P}_{\text{pertes}}} = 50 \text{ min.}$$

6.4 Résistance chauffante dans une enceinte

[●●○]

6.4 – Coup de pouce : Encore une fois, penser à un premier principe entre t et $t + dt$. Puissance dissipée par une résistance ?

6.4 – Correction

- ★ On applique le premier principe au système {gaz + résistance + enceinte} entre les instants t et $t + dt$. L'évolution de ce système est isobare avec $p = p_0$ (p pression du gaz) grâce au piston libre de coulisser. On utilise donc la version avec H du premier principe :

$$dH = \delta W' + \delta Q_{\text{reçu}}.$$

Ici on a $\delta Q_{\text{reçu}} = 0$ car le système est calorifugé.

On a $\delta W'$ qui est, dans cette version du premier principe, le travail autre que celui des forces de pression. Ici il s'agit du travail électrique fourni à la résistance : $\delta W' = U \times I dt = RI^2 dt$.

On a ici $dH = dH_{\text{gaz}}$, avec pour un gaz parfait : $dH = C_p dT$ (C_p la capacité thermique totale du gaz).

Finalement on obtient $\frac{dT}{dt} = \frac{RI^2}{C_p}$. Avec l'expression de R ceci devient : $\frac{dT}{dt} = \frac{R_0 I^2 T}{C_p T_0}$.

★ On intègre cette équation en posant $\tau = \frac{C_p T_0}{R_0 I^2}$, car elle devient $T'(t) = \frac{T(t)}{\tau}$.

Donc $T(t) = Ae^{t/\tau}$, avec $A = T_0$ (pour $t = 0$).

D'où $T(t) = T_0 e^{t/\tau}$.

- On en déduit $V(t) = \frac{nRT(t)}{p} = \frac{nRT(t)}{p_0} = \frac{nRT_0}{p_0} e^{t/\tau} = V_0 e^{t/\tau}$.

6.5 Transformation polytropique

[●●○]

6.5 – Correction

1. Système $\{n \text{ moles de gaz parfait}\}$, transformation infinitésimale : $C_V dT = dU = T dS - p dV$,

$$\text{d'où } \boxed{dS = C_V \frac{dT}{T} + \frac{p}{T} dV.}$$

2. Il faut partir de l'expression précédente, mais avant cela il faut pouvoir exprimer dV en fonction de dT .

On procède pour cela comme avec la loi de Laplace : $pV^k = \text{cst} \Leftrightarrow \frac{nRT}{V} V^k = \text{cst} \Leftrightarrow TV^{k-1} = \text{cst}$.

On prend la différentielle logarithmique : $0 = d \text{cst} = d \ln(TV^{k-1}) = \frac{dT}{T} + (k-1) \frac{dV}{V}$.

On a donc $dS = C_V \frac{dT}{T} + \frac{p}{T} \times \frac{-V}{k-1} \frac{dT}{T} = \frac{nR}{T} \left(\frac{1}{\gamma-1} - \frac{1}{k-1} \right) dT$.

3. On a donc entre les états 0 et 1 : $\Delta S = \int_0^1 dS = \int_0^1 nC \frac{dT}{T} = nC \ln \frac{T_1}{T_0}$.

4. (a) Si $k = 0$ alors on a $pV^k = p$ constant, donc il s'agit d'une transformation isobare. On a $C = \frac{R\gamma}{\gamma-1}$ et donc $dS = nR \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{dT}{T} = C_p \frac{dT}{T}$ (qui est une expression "connue" pour une transformation isobare).

(b) Si $k = 1$ alors pV , et donc nRT , et donc T , sont constants : il s'agit d'une transformation isotherme. On a $C = +\infty$, mais aussi $dT = 0$, donc on ne peut pas conclure avec cette expression là de dS .

(c) Si $k = \gamma$ alors on a pV^γ constant : il s'agit de la loi de Laplace, et la transformation est donc isentropique. On le retrouve ici puisque $C = 0$ et $dS = 0$.

6.6 Transformations adiabatiques dans l'atmosphère

[●●●]

6.6 – Coup de pouce : 1 – On voudrait en fait pouvoir utiliser la relation de Laplace liant T_p à p_p . 2 – Penser que dp_{atm}/dz est donné par la relation de la statique des fluides, ce qui permet de le connaître, ainsi que dp_p/dz . Pour T_p , utiliser la question 1. On doit trouver $\sim 10 \text{ K/km}$.

6.6 – Correction

1. La transformation est rapide, on peut donc supposer que les échanges de chaleur n'ont pas le temps de se faire et donc qu'elle est adiabatique.

On suppose en plus qu'elle est réversible et que le gaz se modélise comme un gaz parfait, ceci afin de pouvoir utiliser la loi de Laplace : $p_p V_p^\gamma = \text{cst}$, soit encore $p_p^{1-\gamma} T_p^\gamma = \text{cst}$.

Il faut différencier cette expression. C'est plus simple en prenant le logarithme : on a $\ln \text{cst} = \ln p_p^{1-\gamma} T_p^\gamma = (1-\gamma) \ln p_p + \gamma \ln T_p$, soit en différenciant :

$$\boxed{0 = (1-\gamma) \frac{dp_p}{p_p} + \gamma \frac{dT_p}{T_p}.}$$

2. L'équilibre mécanique est toujours atteint, donc on a $p_p(z) = p_{atm}(z)$ et même chose en $z + dz$.

On a donc $\frac{dp_p}{dz} = \frac{dp_{atm}}{dz} = -\rho_{atm}g$ d'après la relation de la statique des fluides (axe z vers le haut).

Concernant T_p , on utilise la question précédente :

$$\frac{dT_p}{dz} = -\frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{T_p}{p_p} \frac{dp_p}{dz} = \frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{T_p}{p_p} \rho_{atm}g.$$

On a d'après la loi des gaz parfaits : $p_p = \rho_p \frac{RT_p}{M}$. On peut supposer que $\rho_{atm} = \rho_p$ si on prend les valeurs à l'altitude z .

$$\text{Donc on a } \frac{dT_p}{dz} = \frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{T_p}{p_p} \rho_p g = \frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{M}{R} g.$$

$$\text{On a donc } \boxed{\frac{dT_p}{dz} = \frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{M}{R} g = 9.8 \times 10^{-3} \text{ K/m} = 9.8 \text{ K/km.}}$$

3. Dans ce cas la température de l'atmosphère baisse plus rapidement (lorsque z augmente) que la température de la particule de fluide.

Prenons une particule de fluide à l'équilibre à l'altitude z : on a $T_p(z) = T_{atm}(z)$.

Si elle s'élève légèrement, alors on aura $T_p(z+dz) > T_{atm}(z+dz)$ (car la température de l'atmosphère baisse plus rapidement).

On aura donc, la pression étant la même : $\rho_p(z+dz) < \rho_{atm}(z+dz)$. La particule devient donc moins dense que l'air qui l'entoure. La poussée d'Archimède est donc plus forte que le poids, et elle s'élève encore.

On a donc une particule qui, si elle s'élève un peu, s'élève encore plus : c'est une situation instable.

Remarque : Dans ce cas d'instabilité, il va y avoir d'importants mouvements de convection dans l'atmosphère. Ces mouvements vont faire monter l'air chaud et descendre l'air froid, ce qui va tendre à ramener l'atmosphère dans un état où $\frac{dT_{atm}}{dz} \simeq 9.8 \text{ K/km}$.

C'est la raison pour laquelle le gradient de température prend souvent cette valeur (appelé gradient adiabatique). On peut aussi noter que les calculs qui précèdent valent pour une atmosphère sèche, et la prise en compte de l'humidité change légèrement cette valeur.

Thermodynamique : changements d'état et diagrammes

7.1 Glace dans l'eau

[●○○]

7.1 – Coup de pouce : Décomposer la transformation en étapes (glace+liquide \rightarrow glace+liquide tous à 0°C \rightarrow liquide+liquide tous à 0°C) et utiliser ΔH .

7.1 – Correction

On suppose que les glaçons sortants du congélateur sont à -15°C .

On note m_g la masse de glaçons. On note m_l la masse de jus d'orange, que l'on assimile à de l'eau.

On prendra $m_l = 200\text{ g}$ (pour 20 cl de jus d'orange, soit un verre standard).

On considère le système {jus d'orange + glaçons}.

On décompose en étapes (fictives) :

$$a \left| \begin{array}{l} m_g \text{ solide à } T_1 = -15^\circ\text{C} \\ m_l \text{ liquide à } T_2 = 30^\circ\text{C} \end{array} \right. \rightarrow b \left| \begin{array}{l} m_g \text{ solide à } T_0 = 0^\circ\text{C} \\ m_l \text{ liquide à } T_0 = 0^\circ\text{C} \end{array} \right. \rightarrow c \left| \begin{array}{l} m_g \text{ liquide à } T_0 = 0^\circ\text{C} \\ m_l \text{ liquide à } T_0 = 0^\circ\text{C} \end{array} \right.$$

Le dernier état est choisi ainsi car c'est ce que l'on cherche à obtenir. La seule inconnue est donc la masse de glace m_g .

Puis on effectue un bilan d'enthalpie.

La transformation est monobare avec $p_i = p_f = p_{\text{ext}}$, on peut donc appliquer le premier principe au système sous la forme $\Delta H = Q_{\text{reçu}}$.

On va supposer que $Q_{\text{reçu}} = 0$, ce qui revient à dire que l'on néglige les pertes thermiques vers l'extérieur. On est obligé car on n'a aucune informations sur ces dernières.

On a donc $\Delta H = 0$ entre l'état initial et l'état final.

Or on a, avec la décomposition en étapes :

$$\Delta H = \Delta H_{01} + \Delta H_{12} = m_g c_g (T_0 - T_1) + m_l c_l (T_0 - T_2) + m_g l_{\text{fus}}.$$

Ceci étant égal à zéro, on isole $m_g = \frac{m_l c_l (T_2 - T_0)}{c_g (T_0 - T_1) + l_{\text{fus}}} = 69\text{ g}$.

7.2 Bilan d'enthalpie avec changement d'état

[●●○]

7.2 – Coup de pouce : Pour 2 et 3, décomposer la transformation en étapes et utiliser ΔH . L'état final à choisir dépend de la question (soit tout liquide à 0°C , soit tout solide à 0°C).

7.2 – Correction

1.

2. Si l'on met trop de glace, il y aura du solide dans l'état final. Juste avant qu'il y en ait, l'état final sera tel que l'ensemble est liquide à $T_f = 0^\circ\text{C}$. Calculons donc la masse de glace initiale telle que l'état final soit liquide à $T_f = 0^\circ\text{C}$.

On décompose en étapes :

$$a \left| \begin{array}{l} m_2 \text{ solide à } T_2 = -5^\circ\text{C} \\ m_1 \text{ liquide à } T_1 = 15^\circ\text{C} \end{array} \right. \rightarrow b \left| \begin{array}{l} m_2 \text{ solide à } T_0 = 0^\circ\text{C} \\ m_1 \text{ liquide à } T_0 = 0^\circ\text{C} \end{array} \right. \rightarrow c \left| \begin{array}{l} m_2 \text{ liquide à } T_0 = 0^\circ\text{C} \\ m_1 \text{ liquide à } T_0 = 0^\circ\text{C} \end{array} \right.$$

Puis on effectue un bilan d'enthalpie.

La transformation est monobare avec $p_i = p_f = p_{\text{ext}}$, on peut donc appliquer le premier principe au système sous la forme $\Delta H = Q_{\text{reçu}}$. Avec $Q_{\text{reçu}} = 0$ car l'enceinte est calorifugée.

On a donc $\Delta H = 0$ entre l'état initial et l'état final.

Or on a, avec la décomposition en étapes : $\Delta H = m_2 c_s (T_0 - T_2) + m_1 c_l (T_0 - T_1) + m_2 h_{\text{fus}}$.

Ceci étant égal à zéro, on isole $m_2 = \frac{m_1 c_l (T_1 - T_0)}{c_s (T_0 - T_2) + h_{\text{fus}}} = 92 \text{ g}$.

Si on met moins de glace, tout est liquide dans l'état final.

3. Même démarche que dans le 2, mais cette fois :

a $\left| \begin{array}{l} m_2 \text{ solide à } T_2 = -5^\circ\text{C} \\ m_1 \text{ liquide à } T_1 = 15^\circ\text{C} \end{array} \right. \rightarrow$ b $\left| \begin{array}{l} m_2 \text{ solide à } T_0 = 0^\circ\text{C} \\ m_1 \text{ liquide à } T_0 = 0^\circ\text{C} \end{array} \right. \rightarrow$ c $\left| \begin{array}{l} m_2 \text{ solide à } T_0 = 0^\circ\text{C} \\ m_1 \text{ solide à } T_0 = 0^\circ\text{C} \end{array} \right.$

Donc cette fois $0 = \Delta H = m_2 c_s (T_0 - T_2) + m_1 c_l (T_0 - T_1) + m_1 (-h_{\text{fus}})$, et on isole

$m_2 = \frac{m_1 c_l (T_1 - T_0) + m_1 h_{\text{fus}}}{c_s (T_0 - T_2)} = 19.1 \text{ kg}$.

Si on met plus de glace, tout est solide dans l'état final.

4. 200 g est entre 92 g et 19.1 kg, l'état final sera donc diphasé (et donc à 0°C).

5. Pour le système {masse $m_1 + m_2$ d'eau} :

- $\Delta S_{a \rightarrow b} = \Delta S_{\text{masse } m_1} + \Delta S_{\text{masse } m_2} = m_1 c_l \ln \frac{T_0}{T_1} + m_2 c_g \ln \frac{T_0}{T_2}$ (formule pour ΔS pour des phases condensées incompressibles indilatables changeant de température).
- $\Delta S_{b \rightarrow c} = \Delta S_{\text{masse } m_1} + \Delta S_{\text{masse } m_2} = 0 + \frac{m_2 h_{\text{fus}}}{T_0}$ car pour la masse m_2 d'eau il s'agit d'un changement d'état réversible pour lequel $\Delta S = S_e + S_c = S_e = \frac{m_2 h_{\text{fus}}}{T_0}$, et pour la masse m_1 il ne se passe rien.

Enfin, S est une fonction d'état et ne dépend donc pas du chemin suivi entre deux états identiques, donc :

$\Delta S = \Delta S_{a \rightarrow b} + \Delta S_{b \rightarrow c} = \left(m_1 c_l \ln \frac{T_0}{T_1} + m_2 c_g \ln \frac{T_0}{T_2} \right) + \frac{m_2 h_{\text{fus}}}{T_0} = 2.92 \text{ J/K}$ (bien mettre les températures en kelvins).

Le système considéré ici est calorifugé, il n'échange donc pas d'entropie avec l'extérieur. Le second principe s'écrit donc $\Delta S = S_c$. On a donc une entropie créée $S_c = 2.92 \text{ J/K}$ strictement positive : la transformation est irréversible.

7.3 Eau à l'équilibre diphasique

[●●○]

7.3 – Coup de pouce : Tracer l'allure de l'isotherme à $T_1 = 80^\circ\text{C}$, on sait que cette isotherme coupe la courbe de saturation à v_l et v_g donnés dans le tableau. Par ailleurs on calcule $v = m/V$ pour le système considéré : $v = 1 \text{ m}^3/1 \text{ kg}$, qui est donc dans le domaine diphasique.

Utiliser ensuite des relations du type $v = x_l v_l + x_g v_g$, etc.

7.3 – Correction

1.

2. $v = 1 \text{ m}^3/\text{kg}$, on connaît également v_g et v_l (tableau, à 80°C). On a la relation $v = x_l v_l + x_g v_g = (1 - x_g)v_l + x_g v_g$, donc $x_g = \frac{v - v_l}{v_g - v_l} = 0.2933$.

3. Même chose mais la température est différente. $x_g = \frac{v - v_l}{v_g - v_l} = 0.9643$.

4. ★ Dans l'état final (état 2), il y a équilibre liquide-gaz, donc $p_2 = p_{\text{sat}}(T_2) = 169.1 \text{ kPa}$.

★ La transformation du système {liquide et gaz contenu dans l'enceinte} est la suivante :

$$1 \left\{ \begin{array}{l} (1 - x_1)m \text{ solide} \\ x_1 m \text{ liquide} \\ T_1 = 80^\circ\text{C et } p_1 = 47.39 \text{ kPa} \\ x_1 = 0.2933 \end{array} \right. \rightarrow 2 \left\{ \begin{array}{l} (1 - x_2)m \text{ solide} \\ x_2 m \text{ liquide} \\ T_2 = 115^\circ\text{C et } p_2 = 169.1 \text{ kPa} \\ x_2 = 0.9643 \end{array} \right.$$

- Variation d'enthalpie $\Delta H = m [(1 - x_2)h_{l2} + x_2 h_{g2}] - m [(1 - x_1)h_{l1} + x_1 h_{g1}] = 1608 \text{ kJ}$.
- Variation d'énergie interne : $\Delta U = (H_2 - p_2 V_2) - (H_1 - p_1 V_1) = \Delta H - (p_2 - p_1)V = 1486 \text{ kJ}$.
- Travail reçu $W = 0$ car l'enceinte étant indéformable, son volume ne varie pas, et donc les forces de pression ne travaillent pas.
- Énergie thermique reçue : d'après le premier principe appliqué au système {contenu de l'enceinte} on a $\Delta U = W + Q$, avec ici $W = 0$.
Donc $Q = \Delta U = 1486 \text{ kJ}$.
- Variation d'entropie $\Delta S = m [(1 - x_2)s_{l2} + x_2 s_{g2}] - m [(1 - x_1)s_{l1} + x_1 s_{g1}] = 3.987 \text{ kJ/K}$.
- L'entropie échangée au cours de la transformation est $S_e = \frac{Q}{T_2}$ car l'échange de chaleur se fait au contact d'un thermostat à T_2 .
On obtient ainsi $S_e = 3.830 \text{ kJ/K}$.
- L'entropie créée au cours de la transformation est $S_c = \Delta S - S_e = 0.157 \text{ kJ/K}$, qui est bien positive ou nulle.

7.4 Énergétique et bilan d'énergie lors de changements de phases [○○○]

7.4 – Correction Le changement d'état liquide \rightarrow gaz est endothermique. Le fluide reçoit donc un transfert thermique positif, donc ceci permet de refroidir le milieu extérieur.

Le transfert thermique reçu par le fluide s'écrit $Q_{\text{reçu}} = m l_{\text{vap}} = 122 \text{ kJ}$.

Thermodynamique : Viscosité et relation de Bernoulli

8.1 Bilan de puissance

[○○○]

8.1 – **Coup de pouce** : Montrer que $v_A = v_B$. Puis relation de Bernoulli, sans se tromper. On arrive à $w_i = \frac{p_B - p_A}{\rho} + gh = 1.1 \times 10^3 \text{ J/kg}$.

8.1 – **Correction** Hypothèses pour pouvoir appliquer la relation de Bernoulli le long d'une ligne de courant entre les points A et B : fluide incompressible, parfait, et régime stationnaire. On a donc :

$$\frac{p_B}{\rho} + \frac{1}{2}v_B^2 + gz_B = \frac{p_A}{\rho} + \frac{1}{2}v_A^2 + gz_A + w_i.$$

Le fluide est incompressible, donc le débit volumique se conserve : $S_A v_A = S_B v_B$ avec $S_A = S_B$ la section de la conduite. Donc $v_A = v_B$.

On a également $h = z_B - z_A$.

On en déduit le travail massique indiqué à fournir au fluide : $w_i = \frac{p_B - p_A}{\rho} + gh = 1.1 \times 10^3 \text{ J/kg}$.

Puis la puissance indiquée $P_i = (\rho D_v) \times w_i = 0.31 \text{ W}$.

8.2 Perte de charge et diagramme

[●○○]

8.2 – Correction

1 - Sur le graphique on relève $\lambda = 0.050$. On calcule ensuite $\frac{\Delta p_c}{L} = 1.9 \times 10^2 \text{ Pa/m}$.

2 - ★ Il faut d'abord calculer la perte de charge résultant d'une dénivellation de $h = 1 \text{ m}$. Appliquons la relation de Bernoulli entre deux points A et B, avec $z_B - z_A = h$, $v_A = v_B$:

$$\frac{p_B}{\rho} + \frac{1}{2}v_B^2 + gz_B = \frac{p_A}{\rho} + \frac{1}{2}v_A^2 + gz_A,$$

d'où une perte de charge $p_A - p_B = \rho g(z_B - z_A) = \rho gh = 10^4 \text{ Pa}$.

★ On reprend enfin $\frac{\Delta p_c}{L} = 1.9 \times 10^2 \text{ Pa/m}$. Il faut une longueur $L = \frac{10^4 \text{ Pa}}{1.9 \times 10^2 \text{ Pa/m}} = 53 \text{ m}$.

8.3 Calcul de débit

[●○○]

8.3 – **Correction** $D_v = \iint_S \vec{v} \cdot dS \vec{e}_z = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r d\theta dr = \dots = \frac{\pi R^2 v_0}{2}$.

8.4 Vidage d'une écluse

[●●●]

8.4 – Coup de pouce : Faire un schéma, placer un point A sur la surface libre et un point B au niveau de l'ouverture, un axe z vers le haut tel que $z_B = 0$ et $z_A = z(t)$ varie.

Montrer que $v_B = \sqrt{2gz(t)}$.

Trouver un lien entre les vitesses v_A et v_B , remarquer que $v_A = -\frac{dz}{dt}$, arriver à l'équation différentielle $\dot{z} = -\frac{S_B}{S_A}\sqrt{2gz(t)}$.

Intégrer cette dernière par séparation des variables entre $(t = 0, z = h)$ et $(t = t_f, z = 0)$.

On obtient $t_f = \frac{S_A}{S_B}\sqrt{\frac{2h}{g}} = 114 \text{ s}$.

8.5 Hauteur atteinte par un jet d'eau

[●○○]

8.5 – Coup de pouce : 1 – Point A sur la surface de l'eau en haut, point B au bout du jet d'eau. Écrire la relation de Bernoulli (avec hypothèses...), puis simplifier ce qui peut l'être. On doit trouver une hauteur du jet $z_B = z_A$.

8.5 – Correction

1 - Point A sur la surface de l'eau en haut, point B au bout du jet d'eau. On a $v_A \simeq 0$. On a $v_B = 0$ par définition puisque le point B est le point où le jet d'eau s'arrête.

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2}v_A^2 + gz_A = \frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2}v_B^2 + gz_B, \text{ et il ne reste plus que } z_A = z_B.$$

2 - Même principe, cette fois il reste $gz_B = gz_A + w_i$, d'où une puissance indiquée à fournir $\Psi_i = D_m w_i = \rho D_v g(z_B - z_A) = 11 \text{ W}$.

3 - Cette fois on choisit un point B dans le jet, à une hauteur $z_B = z$.

$$\text{On a } \frac{p_0}{\rho} + 0 + gh = \frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2}v(z)^2 + gz, \text{ d'où } v(z) = \sqrt{2g(h-z)}. \text{ (On retrouve bien que } v \text{ s'annule lorsque sa hauteur } z = h.)$$

8.6 Vidange d'un récipient fermé

[●●○]

8.6 – Correction Faire un schéma. Soit A un point à la surface de l'eau dans le récipient, et B un point à la sortie du jet d'eau. On note $h(t) = z_A - z_B$ la hauteur d'eau.

1 - Utiliser Bernoulli, avec $v_A \ll v_B$. On obtient $v_B = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_A - p_0) + 2gh(t)}$.

2 - Reprendre l'expression précédente et trouver un moyen d'exprimer $p_A(t)$, qui est la pression dans le récipient, par exemple en utilisant la loi des gaz parfaits. On trouve $p_A(t) = \frac{H - h_0}{H_h(t)}$.
On remplace dans l'expression de v_B , et on dit qu'à la fin on a $v_B = 0$ et $h(t) = h_f$.

3 - Que vaut p_A dans ce cas ? On doit obtenir $h_f = \frac{p_0}{\rho g}$.

8.7 Vidange d'un récipient à vitesse constante

[●●○]

8.7 – Correction $S(z)$ doit être proportionnel à \sqrt{z} .

8.8 Tirage d'une cheminée

[●●○]

8.9 Répartition hydraulique

[●●○]

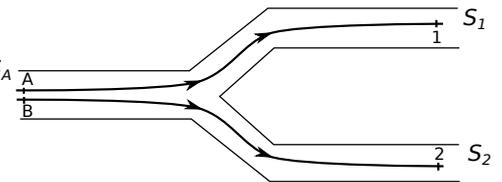
8.9 – **Coup de pouce** : Attention, la relation de Bernoulli s'applique entre deux points le long d'une même ligne de courant. Faire un schéma sur lequel apparaissent quelques lignes de courant. On peut considérer que les différentes grandeurs prennent la même valeur en A sur deux lignes de courant proches.

8.9 – Correction

La pression en 1 et en 2 est p_0 . On note p_A celle en A, inconnue.

Le fluide est supposé incompressible, on a donc égalité des débits volumiques entrant et sortant : $S_A v_A = S_1 v_1 + S_2 v_2 = S_A$

$\frac{S_A}{2}(v_1 + v_2)$, d'où une première équation : $v_1 + v_2 = 2v_A$.



On considère deux lignes de courant comme sur le schéma ci-contre. Les différentes grandeurs ont la même valeur en A et en B car ces points sont proches.

L'écoulement est supposé parfait, incompressible, et le régime est stationnaire, donc on peut utiliser la relation de Bernoulli entre les points A et 1, et également entre les points B et 2 :

$$\frac{p_A}{\rho} + \frac{1}{2}v_A^2 + 0 = \frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2}v_1^2 + \rho gh/2, \quad \frac{p_A}{\rho} + \frac{1}{2}v_A^2 + 0 = \frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2}v_2^2 - \rho gh/2.$$

On a donc une deuxième relation : $v_2^2 - v_1^2 = 2gh$.

On a deux équations et deux inconnues (v_1 et v_2) : on peut résoudre.

Il est malin d'écrire que $2gh = v_2^2 - v_1^2 = (v_2 - v_1)(v_2 + v_1) = (v_2 - v_1)(2v_A)$, d'où $v_2 - v_1 = \frac{gh}{v_A}$.

On a aussi $v_2 + v_1 = 2v_A$.

On fait la somme et la différence des deux dernières équations pour obtenir

$$v_1 = v_A \left(1 - \frac{gh}{2v_A^2}\right) = 0.50 \text{ m/s} \quad \text{et} \quad v_2 = v_A \left(1 + \frac{gh}{2v_A^2}\right) = 1.5 \text{ m/s}.$$

Remarque : Si $gh > 2v_A^2$ alors on obtient $v_1 < 0$. C'est qu'en réalité, dans ce cas là, la dénivellation est trop importante pour que l'eau y parvienne, et tout passe par la conduite du bas. Le raisonnement serait alors à reprendre (en ignorant la conduite du haut).

8.10 Vidange en passant par un siphon

[●○○]

8.10 – Correction

Fluide incompressible et parfait, régime supposé presque stationnaire : on peut appliquer la relation de Bernoulli.

1 - Bernoulli le long d'une ligne de courant allant de D à C. On trouve $v_C = \sqrt{2(z_D - z_C)}$.

La condition est que $z_D > z_C$.

2 - Bernoulli le long d'une ligne de courant allant de B à C. On trouve $p_B = p_0 + \rho g(z_C - z_B)$.

La condition est donc que $p_B > 0$ (impossible sinon), et donc que $z_B < z_C + \frac{p_0}{\rho g}$.

Rq : on trouve la même chose en appliquant Bernoulli entre D et B.

Thermodynamique : Systèmes ouverts

9.1 Question de cours – compresseur

[○○○]

9.1 – Correction

1 – Régime stationnaire, donc le débit massique se conserve : il est identique en entrée et en sortie.

On ne peut en revanche rien dire sur le débit volumique.

2 – Régime stationnaire, on applique le premier principe au système ouvert {fluide en écoulement dans le compresseur} :

$$\Delta e_c + \Delta e_p + \Delta h = w_i + q.$$

On peut supposer ici que Δe_c et Δe_p sont négligeables, et que le compresseur est calorifugé si bien que $q = 0$.

On a donc $w_i = \Delta h = h_s - h_e$.

3 – On peut placer le point d'entrée sur le diagramme car on connaît h_e et p_e .

On calcule $h_s = h_e + w_i = 220 \text{ kJ/kg}$. On place le point de sortie sur le diagramme en connaissant h_s et en sachant que ce point est à la même abscisse que le point d'entrée car l'évolution est isentropique (car réversible et adiabatique).

On lit ensuite la pression de sortie sur le diagramme : $p_s \simeq 4 \text{ bar}$.

9.2 Question de cours – turbine

[○○○]

9.2 – Correction

1 – Régime stationnaire, donc le débit massique se conserve : il est identique en entrée et en sortie.

On ne peut en revanche rien dire sur le débit volumique.

2 – Régime stationnaire, on applique le premier principe au système ouvert {fluide en écoulement dans la turbine} :

$$\Delta e_c + \Delta e_p + \Delta h = w_i + q.$$

On peut supposer ici que Δe_c et Δe_p sont négligeables, et que la turbine est calorifugée si bien que $q = 0$.

On a donc $w_i = \Delta h = h_s - h_e$.

3 – On peut placer le point d'entrée sur le diagramme car on connaît h_e et p_e .

On place le point de sortie sur le diagramme en connaissant p_s et en sachant que ce point est à la même abscisse que le point d'entrée car l'évolution est isentropique (car réversible et adiabatique).

On lit ensuite l'enthalpie de sortie sur le diagramme : $h_s \simeq 235 \text{ kJ/kg}$.

Enfin, on calcule $w_i = h_s - h_e = -15 \text{ kJ/kg}$. Il s'agit du travail massique indiqué reçu par le fluide en écoulement. Le travail massique récupéré est donc l'opposé : $+15 \text{ kJ/kg}$.

9.3 Question de cours – tuyère

[●○○]

9.3 – Coup de pouce : Pour une tuyère, l'énergie cinétique de sortie n'est pas négligeable.

9.3 – Correction

1 – Régime stationnaire, donc le débit massique se conserve : il est identique en entrée et en sortie.

On ne peut en revanche rien dire sur le débit volumique.

2 – Régime stationnaire, on applique le premier principe au système ouvert {fluide en écoulement dans la turbine} :

$$\Delta e_c + \Delta e_p + \Delta h = w_i + q.$$

On peut supposer ici que Δe_p est négligeable, que la tuyère est calorifugée si bien que $q = 0$, et qu'elle ne comporte pas de parties mobiles si bien que $w_i = 0$. On suppose également la vitesse d'entrée du fluide très inférieure à la vitesse de sortie (c'est l'objectif d'une tuyère) et on néglige donc $e_{c,e}$.

On a donc $e_{c,s} + \Delta h = 0$, soit $\frac{1}{2}v_s^2 = -\Delta h = h_e - h_s$, soit $v_s = \sqrt{2(h_e - h_s)}$.

3 – Pour un gaz parfait, on a $h_e - h_s = c_p(T_e - T_s)$ avec c_p la capacité thermique massique à pression constante.

9.4 Compresseur mono-étagé et étagé

[●●○]

9.4 – Coup de pouce : Tout l'exercice se traite avec le premier principe pour un système ouvert et la relation de Laplace.

4 – On pourra admettre le résultat, qui est un peu calculatoire.

9.4 – Correction

1 – Régime stationnaire. On applique le premier principe au système ouvert {fluide en écoulement dans le compresseur}. On a donc $\Delta e_c + \Delta e_p + \Delta h = w_i + q$.

Or ici on néglige les variations d'énergie cinétique et potentielle, on a $q = 0$ car le compresseur est calorifugé, et on utilise $\Delta h = c_p(T_2 - T_0)$ car le fluide est modélisé comme un gaz parfait.

Donc on a $w_i = c_p(T_2 - T_0)$.

2 – La compression est adiabatique et réversible, le fluide modélisé comme un gaz parfait, donc on peut utiliser la loi de Laplace : $p_0^{1-\gamma}T_0^\gamma = p_2^{1-\gamma}T_2^\gamma$, soit

$$T_2 = T_0 \left(\frac{p_0}{p_2} \right)^{(1-\gamma)/\gamma} = T_0 \beta^{(\gamma-1)/\gamma} = 690 \text{ K} = 417^\circ\text{C}.$$

(T en Kelvin pour l'A.N.)

3 – Premier principe successivement aux systèmes ouverts {étage 1}, {échangeur thermique}, et {étage 2} :

$$w_{i,\text{étage 1}} = c_p(T_1 - T_0), \quad q_{\text{échangeur}} = c_p(T_0 - T_1), \quad w_{i,\text{étage 2}} = c_p(T_2 - T_0).$$

De plus la transformation dans l'étage 1 étant adiabatique réversible on a $T_1 = T_0 \beta_1^{(\gamma-1)/\gamma}$, et de même pour la transformation dans l'étage 2 : $T_2 = T_0 \beta_2^{(\gamma-1)/\gamma}$.

Le travail indiqué total fourni au fluide est donc $w_i = c_p T_0 \left(\beta_1^{(\gamma-1)/\gamma} + \beta_2^{(\gamma-1)/\gamma} - 2 \right)$.

4 – On pose $x = p_1$ et $\alpha = (\gamma - 1)/\gamma$. Il faut trouver pour quelle valeur de x la fonction $f(x) = \frac{x^\alpha}{p_0^\alpha} + \frac{p_2^\alpha}{x^\alpha} - 2$ est minimale.

On a $f'(x) = \alpha \frac{x^{\alpha-1}}{p_0^\alpha} + (-\alpha) \frac{p_2^\alpha}{x^{\alpha+1}}$, et donc $f'(x) = 0$ est équivalent à $x = \sqrt{p_0 p_2}$.

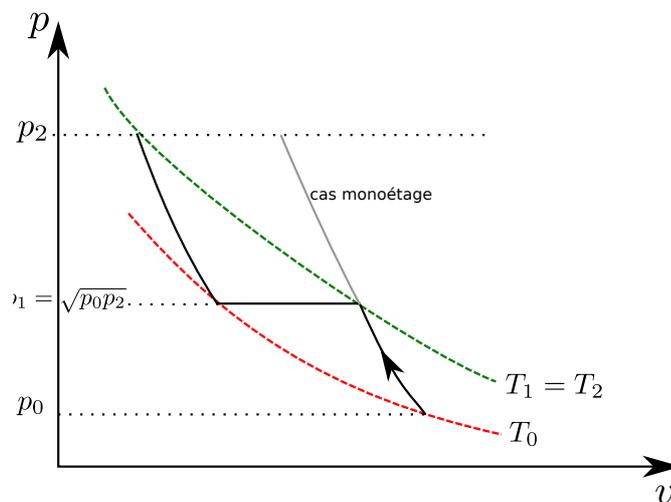
On peut montrer que $f''(\sqrt{p_0 p_2}) = 2\alpha^2 (p_2/p_0)^{\frac{\alpha}{2}-1} > 0$ et que c'est donc bien un minimum.

5 – On a alors $\beta_1 = \beta_2 = \sqrt{\beta}$.

D'où $T_2 = T_1 = T_0 \beta_1^{(\gamma-1)/\gamma} = T_0 \beta^{(\gamma-1)/(2\gamma)} = 449 \text{ K} = 176 \text{ °C}$.

C'est moins élevé que dans le cas monoétagé, ce qui est normal car il y a une évacuation de chaleur au cours du processus.

6 –



On peut remarquer que si on multiplie les étages à l'infini, alors on obtient une évolution isotherme à $T = T_0$ pour laquelle le travail indiqué reçu serait nul.

7 – On a $w_{i,2\text{étages}} = c_p T_0 \left(\beta_1^{(\gamma-1)/\gamma} + \beta_2^{(\gamma-1)/\gamma} - 2 \right) = 2c_p T_0 \left(\beta^{(\gamma-1)/(2\gamma)} - 1 \right)$,

et $w_{i,1\text{étage}} = c_p (T_0 \beta^{(\gamma-1)/\gamma} - T_0) = c_p T_0 (\beta^{(\gamma-1)/\gamma} - 1) = c_p T_0 (\beta^{(\gamma-1)/(2\gamma)} - 1) (\beta^{(\gamma-1)/(2\gamma)} + 1)$,
donc :

$$\frac{w_{i,1\text{étage}}}{w_{i,2\text{étages}}} = \frac{1}{2} (\beta^{(\gamma-1)/(2\gamma)} + 1).$$

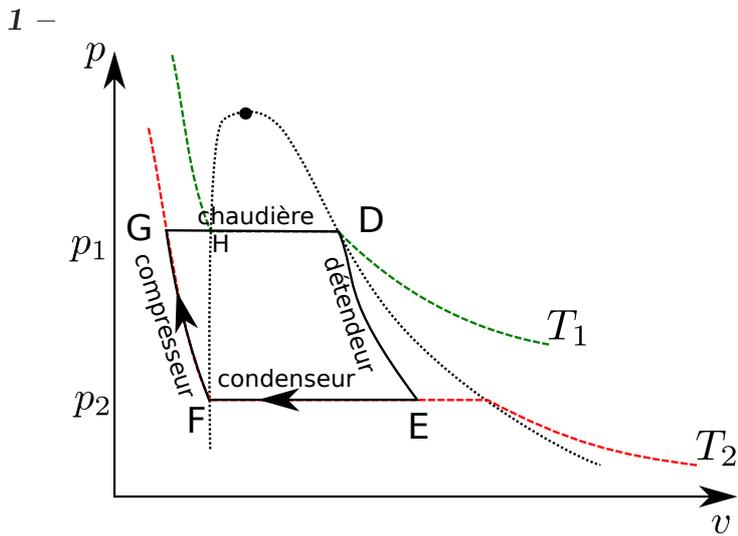
Ce rapport est bien supérieur à 1 (si $\beta > 0$, donc pour une compression), ce qui montre que le travail à fournir au fluide est moindre pour le cas à 2 étages.

9.5 Turbomachine

[●●●]

9.5 – Coup de pouce : 1 – Sens de parcours ? Puis commencer par représenter les isothermes à T_1 et T_2 . 3 – Justifier que $s_E - s_D = 0$. Puis exprimer cette différence en passant par le chemin DHFE avec H sur la courbe du liquide saturé.

9.5 – Correction



2 – $h_{\text{vap}}(T_2) = h_v(T_2) - h_l(T_2) = 2454.0 \text{ kJ/kg}$.

3 – La détente est isentropique donc $s_E = s_D$.

s étant une fonction d'état, sa variation ne dépend pas du chemin suivi entre deux états fixés. On peut donc également exprimer cette différence en passant par le chemin $DHFE$, avec H sur la courbe du liquide saturant à T_1 . On a alors

$$s_H - s_D = \frac{-l_{\text{vap}}(T_1)}{T_1} \text{ car il s'agit d'un changement d'état,}$$

$$s_F - s_H = c_l \ln \frac{T_2}{T_1} \text{ d'après la formule pour une phase condensée,}$$

$$s_E - s_F = \frac{l_{\text{vap}}(T_2)}{T_2} \times x_{\text{vap},E} \text{ car il s'agit d'un changement d'état.}$$

D'où $0 = \frac{-l_{\text{vap}}(T_1)}{T_1} + c_l \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{l_{\text{vap}}(T_2)}{T_2} \times x_{\text{vap},E}$. On isole $x_{\text{vap},E}$, on trouve $x_{\text{vap},E} = 0.68$.

4 – On a $h_D = 2800 \text{ kJ/kg}$. On calcule également $h_E = x_{\text{vap},E}h_v(T_2) + (1 - x_{\text{vap},E})h_l(T_2) = 1754 \text{ kJ/kg}$.

Puis on applique le premier principe au système ouvert {fluide en écoulement dans la turbine} (possible car le régime est permanent), en négligeant les variations d'énergie cinétique et d'énergie potentielle :

$$h_E - h_D = w_T + q.$$

Or $q = 0$ car on suppose la turbine parfaitement calorifugée.

On a alors $w_T = h_E - h_D = 1753 \text{ kJ/kg}$.

5 – $\eta = \frac{w_T}{q_C}$ avec q_C le transfert thermique reçu par le fluide dans la chaudière.

On obtient ce dernier en appliquant le premier principe au système ouvert {fluide en écoulement dans la chaudière} : $\Delta h = q_C$ car pas de parties mobiles. Or $\Delta h = (h_D - h_H) + (h_H - h_G) = -l_{\text{vap}}(T_1) + c_l(T_1 - T_2)$.

D'où $q_C = 2675 \text{ kJ/kg}$, et $\eta = 0.39$.

On peut comparer au rendement du cycle de Carnot réversible : $\eta^* = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 0.44$.

Le rendement du cycle considéré est inférieur car il n'est pas réversible sur les étapes FG et GH (respectivement une compression isotherme et un échauffement isobare).

6 – Lien entre la puissance indiquée \mathcal{P}_T et le travail indiqué w_T : $\mathcal{P}_T = w_T \times D_m$, d'où $D_m = \mathcal{P}_T/w_T = 95.5 \text{ g/s}$.

Thermodynamique : Transferts thermiques par conduction

10.1 Question de cours – expression de la résistance thermique [○○○]

10.1 – Coup de pouce :

1 – Soit on intègre l'équation de la chaleur écrite en régime stationnaire, ce qui donne $T(x) = Ax + B$, puis la loi de Fourier montre que \vec{j}_{th} est constant (le faire); soit on effectue un bilan sur une tranche comprise entre x et $x + dx$: $0 = dU = \Phi_{th}(x)dt - \Phi_{th}(x + dx)dt$, d'où...

2 – Obligatoirement faire un schéma électrique équivalent pour définir R_{th} . Ensuite pour déterminer son expression il faut arriver à $T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1$, d'où $\Phi_{th} = \dots$, d'où $R_{th} = \frac{L}{\lambda S}$.

10.2 Question de cours – résistance thermique, composant électronique, loi de Newton [○○○]

10.2 – Correction

1 – $T - T_0 = P R_{th}$.

2 – $R_{th} = \frac{T_{max} - T_0}{P} = 100 \text{ K/W}$.

3 – $P = hS(T - T_0)$ donc $R_{th} = \frac{1}{hS}$.

10.3 Question de cours – isolation [○○○]

10.3 – Coup de pouce : Schéma électrique équivalent...

10.3 – Correction Résistance thermique totale équivalente (faire un schéma électrique équivalent) :

$$R_{tot} = \frac{1}{\frac{1}{R_{th,f}} + \frac{1}{R_{th,f}} + \frac{1}{R_{th,b} + R_{th,lv}}}$$

Puis flux thermique de l'intérieur vers l'extérieur donné par $\Phi = \frac{T_{int} - T_{ext}}{R_{tot}}$.

10.4 Profil de température dans la Terre [●●●]

10.4 – Coup de pouce : Les grandeurs ne vont dépendre que de r (coordonnées sphériques). Pour le bilan thermique, il faut le faire sur une tranche comprise entre les sphères de rayons r et $r + dr$.

On arrive alors à quelque chose comme $\frac{d\Phi_{th}}{dr} = 4\pi r^2 \times p_{th}$.
Puis utiliser $\Phi_{th} = j_{th} \times S(r) = j_{th} \times 4\pi r^2$.

Enfin remplacer j_{th} par la loi de Fourier $j_{th}(r) = -\lambda \frac{dT}{dr}$.

L'équation est $\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{p_{th}}{\lambda} r^2$. On la laisse sous cette forme pour l'intégrer.

10.5 Fil électrique

[●●●]

10.5 – Coup de pouce : Similaire à l'exercice 10.4, mais en coordonnées cylindriques.

10.6 Barre radioactive

[●●●]

10.6 – Coup de pouce : 1 – Reprendre la démonstration du cours, mais en ajoutant un terme source $p_{th}dV$ dans $\delta Q_{reçu}$. On doit arriver à $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{p_{th}}{\rho c}$

2 – Intégrer l'équation précédente dans le cas du régime stationnaire. À la fin on trouve un maximum au milieu de la barre qui est $T = T_0 + \frac{p_{th}L^2}{8\lambda}$.

10.6 – Correction

1 – On suit la démonstration de l'équation de la chaleur du cours :

★ On utilise un axe x . On note S la section de la barre. Faire un schéma.

On considère une tranche de matériau comprise entre x et $x + dx$. On va écrire la premier principe pour cette tranche, entre les instants t et $t + dt$:

$$dH = \delta Q_{reçu}$$

(on utilise la version avec H car l'évolution est isobare à $p = p_{ext}$).

★ On a $dH = (\rho dV)c dT$ avec $\rho dV = \rho dxS$ la masse de la tranche et c la capacité thermique massique du matériau, et dT l'élévation de température pendant dt (on a donc supposé qu'il s'agit d'une phase condensée incompressible indilatable pour avoir cette expression de dH).

★ On note $\Phi_{th}(x, t)$ le flux thermique orienté selon les x positif.

On a $\delta Q_{reçu} = \Phi_{th}(x, t)dt - \Phi_{th}(x + dx, t)dt + p_{th}dV dt$.

★ Ainsi le premier principe se réécrit :

$$\rho c dx S dT = \Phi_{th}(x, t)dt - \Phi_{th}(x + dx, t)dt + p_{th}dxS dt$$

$$\rho c \frac{dT}{dt} = \frac{1}{S} \frac{\Phi_{th}(x, t) - \Phi_{th}(x + dx, t)}{dx} + p_{th}$$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{S} \frac{\partial \Phi_{th}}{\partial x} + p_{th}$$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j_{th}}{\partial x} + p_{th}$$

On a utilisé $\Phi_{th} = S j_{th}$.

★ Enfin, on utilise la loi de Fourier : $j_{th} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$. On obtient alors

$$\boxed{\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + p_{th}}$$

On remarque qu'il s'agit de l'équation de la chaleur du cours, avec un plus le dernier terme qui est présent à cause des sources de chaleur en volume.

2 – En régime permanent on a $T = T(x)$ et l'équation devient $\lambda \frac{d^2 T}{dx^2} + p_{th} = 0$, soit encore

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{p_{th}}{\lambda}.$$

On intègre une fois : $\frac{dT}{dx} = -\frac{p_{th}}{\lambda} x + A$.

On intègre encore : $T(x) = -\frac{p_{th}}{2\lambda} x^2 + Ax + B$.

On détermine A et B en sachant que $T(0) = T(L) = T_0$.

On trouve au final $T(x) = -\frac{p_{th}}{2\lambda} x^2 + \frac{p_{th}}{2\lambda} x + T_0$.

Pour trouver le maximum on prend la dérivée et on cherche où elle s'annule. On trouve que c'est au milieu, en $x_{max} = \frac{L}{2}$, ce qui est plutôt logique vu la symétrie du problème.

On trouve alors $T_{max} = T_0 + \frac{p_{th} L^2}{8\lambda}$.

10.7 Barre de cuivre chauffée

[●●○]

Correction

$$A = \frac{c_l D_m (T_4 - T_3)}{-\lambda S}, \text{ et } A = \frac{T_2 - T_1}{e}.$$

$$\text{On en déduit } \lambda = \frac{c_l \rho_l D_v (T_4 - T_3) e}{S(T_1 - T_2)} = 388 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}.$$

Optique : Optique géométrique

11.1 Projecteur

[●○○]

11.1 – Coup de pouce : Il y a deux solutions pour d . On veut choisir celle pour laquelle la valeur absolue du grandissement est supérieur à 1.

11.1 – Correction

1 – Voir constructions du cours.

2 – On $\overline{OA'} = D - d$ et $\overline{OA} = -d$, donc $\frac{1}{D-d} + \frac{1}{d} = \frac{1}{f'}$. Ceci se réécrit $d^2 - Dd + f'D = 0$, qui est une équation sur d . Elle admet des solutions réelles si son discriminant $\Delta \geq 0$. On montre que c'est le cas si $D \geq 4f'$.

$$3 - \gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = -\frac{D-d}{d}.$$

D'après la question précédente, il y a deux solutions pour d : $d_+ = \frac{1}{2} \left(D + \sqrt{D^2 - 4f'D} \right)$ et $d_- = \frac{1}{2} \left(D - \sqrt{D^2 - 4f'D} \right)$.

On veut $|\gamma| > 1$, ce qui est équivalent à $\frac{D-d}{d} > 1$ et donc à $D > 2d$.

Or $2d_- < D$ et $2d_+ > D$. La solution acceptable est donc $d_- = \frac{1}{2} \left(D - \sqrt{D^2 - 4f'D} \right)$.

4 – $\frac{l}{b} = |\gamma| = \frac{D-d}{d}$ et on isole $d = 19.1$ cm. Puis $f' = 19.0$ cm.

Optique : Introduction à l'optique ondulatoire

12.1 Question de cours – Laser : fréquence, longueur d'onde, etc. [●○○]

12.1 – Coup de pouce : 2 – Attention, on a $\lambda_0 = c/\nu$, mais certainement pas $\Delta\lambda_0 = c/\Delta\nu$!

12.1 – Correction

1 – Il faut retenir que la fréquence ν de l'onde ne dépend pas du milieu. En revanche la longueur d'onde λ en dépend, et on a la relation $\lambda_{\text{milieu}} = \lambda_{\text{vide}}/n_{\text{milieu}}$. Détaillons :

- Dans le vide : Longueur d'onde $\lambda_0 = 632.99 \text{ nm}$, fréquence $\nu_0 = \frac{c}{\lambda_0} = 4.736 \times 10^{14} \text{ Hz}$.
- Dans l'eau d'indice $n_{\text{eau}} = 1.33$: La fréquence est inchangée, $\nu_{\text{eau}} = \nu_0$.
En revanche $\lambda_{\text{eau}} = \frac{v_{\text{eau}}}{\nu_{\text{eau}}} = \frac{c/n_{\text{eau}}}{\nu_0} = \frac{\lambda_0}{n_{\text{eau}}} = 476 \text{ nm}$.
- De même dans l'air : $\nu_{\text{air}} = \nu_0$ et $\lambda_{\text{air}} = \frac{\lambda_0}{n_{\text{air}}} = 632.80 \text{ nm}$

Enfin, la couleur perçue par un humain dépend en fait uniquement de la fréquence de l'onde. La couleur est donc la même dans l'air ou dans l'eau, et correspond au rouge.

2 – ★ On raisonne dans le vide.

On a la relation $\lambda_0 = \frac{c}{\nu}$, qui se différencie en $\Delta\lambda_0 = c \times \frac{\Delta\nu}{\nu^2}$ (pas de signe moins car les Δ sont des valeurs absolues).

D'où $\Delta\lambda_0 = 4.01 \times 10^{-13} \text{ m} = 0.401 \text{ pm}$.

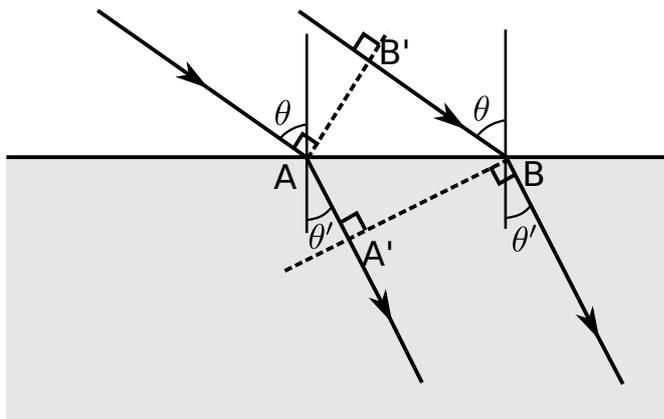
★ Soit τ_c la durée d'un train d'onde. On a la relation $\tau_c \times \Delta\nu \simeq 1$, d'où une durée $\tau_c = 1/\Delta\nu = 3.3 \text{ ns}$.

La longueur associée est $l_c = c \times \tau_c = 1.0 \text{ m}$.

12.2 Réfraction d'une onde plane sur un dioptré plan [●○○]

12.2 – Correction

1 –



2 – ★ Par définition, deux points sur une même surface d'onde ont la même phase. Donc ici on a $\varphi(A, t) = \varphi(B', t)$ et $\varphi(A', t) = \varphi(B, t)$.

On a donc $\varphi(A', t) - \varphi(A, t) = \varphi(B, t) - \varphi(B', t)$.

★ On veut ensuite démontrer la loi de Descartes, c'est-à-dire la relation $n \sin \theta = n' \sin \theta'$.

On sait que $\varphi(A', t) - \varphi(A, t) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(AA')$ et que $\varphi(B, t) - \varphi(B', t) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(BB')$.

On a donc $(AA') = (B'B)$, et donc $n AA' = n' B'B$.

Or $\sin \theta' = \frac{AA'}{AB}$ et $\sin \theta = \frac{B'B}{AB}$.

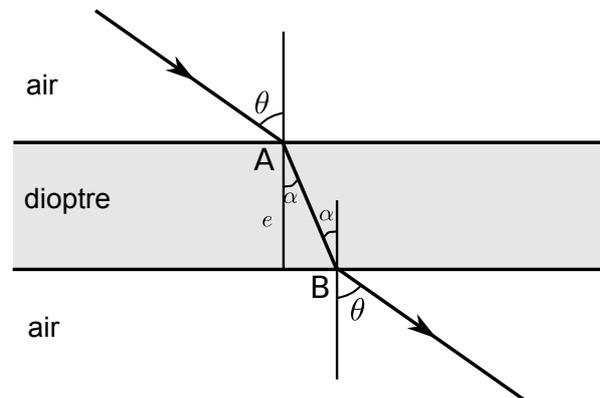
On a donc $n' AB \sin \theta' = n AB \sin \theta$, soit $n' \sin \theta' = n \sin \theta$.

12.3 Traversée d'une lame de verre

[●○○]

12.3 – Correction

1 –



2 – On a $(AB) = n \times AB$. Il faut ensuite exprimer la distance AB .

On a $AB = e / \cos \alpha$.

Et la loi de la réfraction indique que $1 \times \sin \theta = n \sin \alpha$ (pour l'air on prend un indice de 1).

On peut donc écrire $AB = \frac{e}{\cos \alpha} = \frac{e}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{e}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta / n^2}}$.

3 – Le temps de cohérence, ou durée des trains d'onde, d'une lampe spectrale est de l'ordre de $\tau_c = 10^{-11}$ s.

On a la relation $\tau_c \Delta \nu \simeq 1$, donc $\Delta \nu = 1 / \tau_c = 10^{11}$ Hz.

Enfin, λ est donné par $\lambda = \frac{c}{\nu}$, relation qui se différencie en $\Delta \lambda = c \times \frac{\Delta \nu}{\nu^2}$ (pas de signe moins car les Δ sont des valeurs absolues).

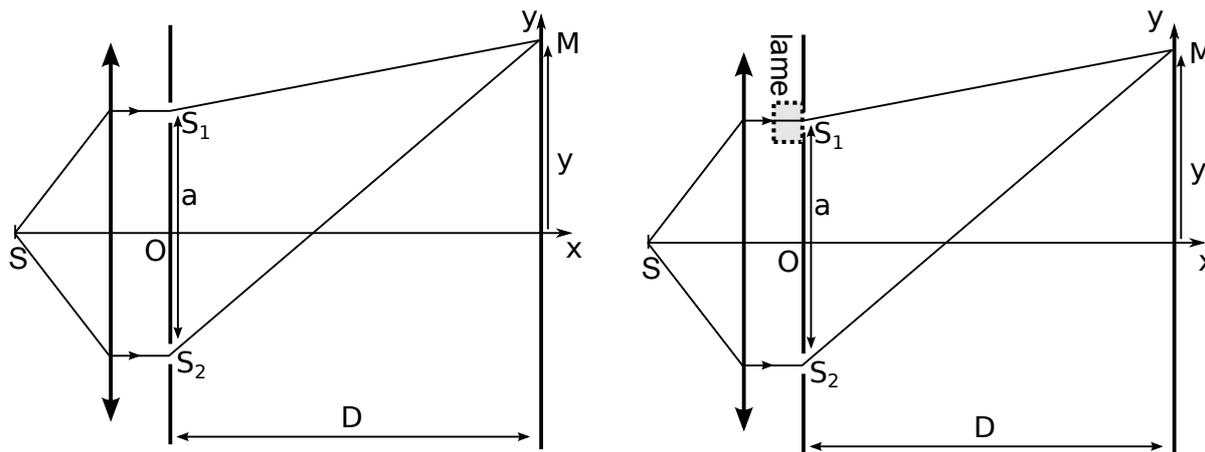
D'où $\Delta \lambda = 3 \times 10^{-11}$ m si on prend $\nu = 10^{15}$ Hz pour une radiation typique dans le visible.

Optique : Interférences à deux ondes

13.1 Mesure de l'épaisseur d'une lame à l'aide du dispositif des trous d'Young [●○○]

13.1 – Coup de pouce : Il s'agit du montage des trous d'Young sans lentille. Il faut utiliser la formule de Pythagore, et faire un développement limité.

13.1 – Correction



1 – Dans le repère $Oxyz$: coordonnées du point S_1 : $(0, a/2, 0)$; du point S_2 : $(0, -a/2, 0)$; du point M : (D, y, z) .

Les distances sont donc :

$$S_1M = \sqrt{D^2 + (y - a/2)^2 + z^2},$$

$$S_2M = \sqrt{D^2 + (y + a/2)^2 + z^2}.$$

La différence de marche au point M est $\delta_M = (SS_1M) - (SS_2M) = (SS_1) - (SS_2) + (S_1M) - (S_2M) = S_1M - S_2M$.

On suppose y , z et a sont très petits devant D , il faut donc faire un développement limité en utilisant la formule $(1 + \epsilon)^{1/2} \simeq 1 + \epsilon/2$ pour $\epsilon \ll 1$.

On a donc :

$$\begin{aligned} S_1M &= \sqrt{D^2 + (y - a/2)^2 + z^2} \\ &= D \sqrt{1 + \frac{(y - a/2)^2 + z^2}{D^2}} \\ &\simeq D \left(1 + \frac{(y - a/2)^2 + z^2}{2D^2} \right) \\ &= D \left(1 + \frac{y^2 - ya + a^2/4 + z^2}{2D^2} \right). \end{aligned}$$

Et de même $S_2M = D \left(1 + \frac{y^2 + ya + a^2/4 + z^2}{2D^2} \right)$.

Ainsi dans la différence il ne reste que le terme $\delta_M = D (-2) \frac{ya}{2D^2}$, soit $\delta_M = -\frac{ya}{D}$. On utilise

la formule de Fresnel : $I(M) = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta_M \right) \right)$.

Donc ici :
$$I(M) = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi ya}{\lambda_0 D} \right) \right).$$

L'interfrange est
$$i = \frac{\lambda_0 D}{a}.$$

Enfin, l'ordre d'interférence est $p = \frac{\delta_M}{\lambda_0}$. la frange centrale correspond à $p = 0$ et donc à $\delta_M = 0$. Ici elle est donc en $y = 0$.

2 – La présence de la lame de verre ajoute un chemin optique $(n - 1)e$ pour le rayon passant par S_1 .

On a donc
$$\delta_M = (n - 1)e - \frac{ya}{D}.$$

La frange centrale est en y tel que $\delta_M = 0$, donc en
$$y = \frac{D(n - 1)e}{a}.$$

En terme de nombre d'interfranges, elle s'est déplacée de
$$\frac{y}{i} = \frac{(n - 1)e}{\lambda_0}.$$

Enfin, on a $e = 10 \times \lambda_0 / (n - 1) = 12.5 \mu\text{m}$.

13.2 Mesure de longueur d'onde à l'aide du dispositif des trous d'Young [●○○]

13.2 – Coup de pouce : Il s'agit du montage des trous d'Young avec lentille : il faut utiliser les surfaces d'onde (et ne pas en dessiner contre la lentille).

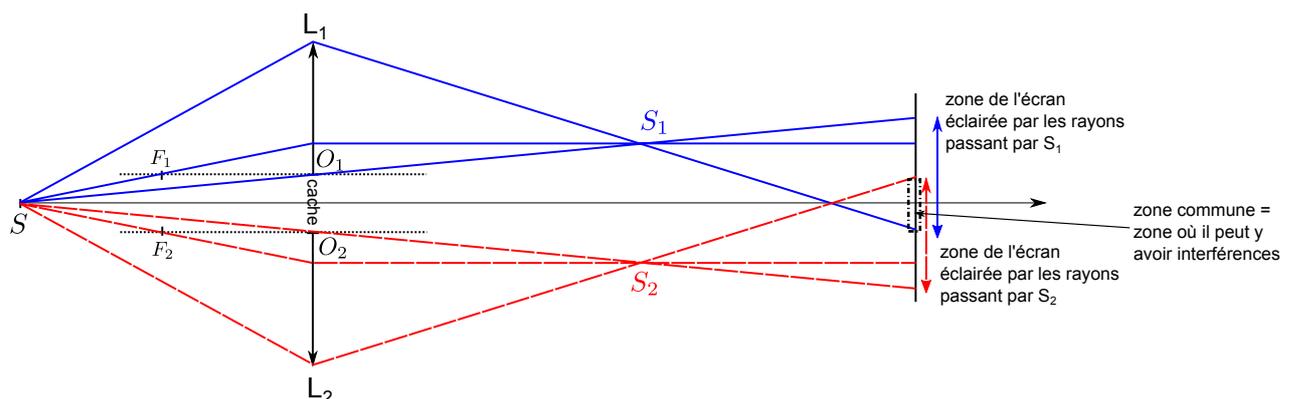
On doit trouver $\delta_M = \frac{ax}{D}$, $I(M) = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi ax}{\lambda_0 D} \right) \right]$, et un interfrange $i = \frac{\lambda_0 D}{a}$.

Enfin, la longueur d'onde inconnue est $\lambda = \lambda_0 \times 10.2/14.4 = 448 \text{ nm}$.

13.3 Bientille de Billet [●●●]

13.3 – Correction

1 – Pour pouvoir tracer le trajet de rayons à travers une lentille, il faut placer les foyers objets ou les foyers images. Une fois F_1 et F_2 placés (au hasard mais sur l'axe optique de chaque lentille, c'est-à-dire à la même hauteur que O_1 ou O_2), on procède comme d'habitude : rayon passant par le centre non dévié, et rayon passant par F qui ressort parallèle à l'axe optique.

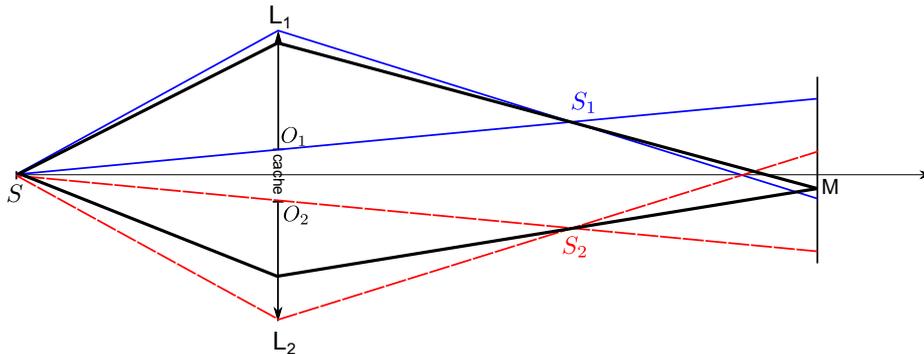


- 2 – S_1 et S_2 agissent comme deux sources secondaires. Elles sont synchrones et cohérentes car proviennent de la même source S .

On a donc deux sources ponctuelles, et la situation est tout à fait analogue à celle des deux trous d'Young. On a interférences, et la figure d'interférence consiste en des franges rectilignes dont l'axe est perpendiculaire au plan de la feuille.

Cependant, il y a interférence seulement dans la zone de l'écran éclairée à la fois par des rayons provenant de S_1 et des rayons provenant de S_2 . On l'a représentée sur la figure (il faut pour cela tracer les rayons extrémaux, passant par les bords des lentilles).

- 3 – On prend un point M sur l'écran et on trace deux rayons arrivant en M . On cherche à exprimer $\delta = (SS_1M) - (SS_2M) = (SS_1) - (SS_2) + (S_1M) - (S_2M)$.



- ★ Montrons que $(SS_1) = (SS_2)$.

S et S_1 sont deux points conjugués par la lentille 1. On sait donc que le chemin optique entre ces deux points ne dépend pas du rayon lumineux choisi. Si on repère par a le rayon lumineux passant par O_1 , on a, quel que soit le rayon, $(SS_1) = (SS_1)_{\text{passant par } O_1}$.

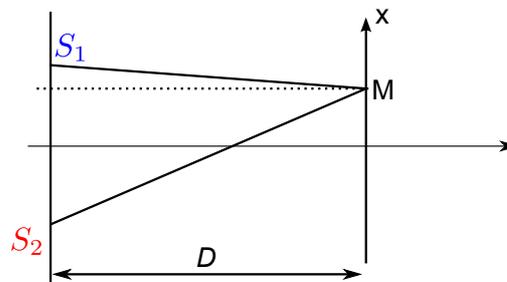
De même pour S et S_2 conjugués par la lentille 2, on a quel que soit le rayon suivi, $(SS_2) = (SS_2)_{\text{passant par } O_2}$.

Or on a, de façon évidente par symétrie, $(SS_1)_{\text{passant par } O_1} = (SS_2)_{\text{passant par } O_2}$.

Donc finalement quels que soient les rayons suivis, on a bien $(SS_1) = (SS_2)$.

- ★ On a donc $\delta = (S_1M) - (S_2M)$, et même $\boxed{\delta = S_1M - S_2M}$ car ces trajets se font dans l'air d'indice pris égal à 1.

★ Arrivé ici, on est dans une situation équivalente aux trous d'Young. On doit simplement exprimer $\delta = S_1M - S_2M$. On fait donc un schéma simplifié qui ne contient que ce qui est essentiel :



On note x la position de M , et $a = S_1S_2$.

Il s'agit de la démonstration du cours, soit en sautant les étapes :

$$S_1M = \sqrt{D^2 + y^2 + (a/2 - x)^2} = D \sqrt{1 + \frac{y^2 + (a/2 - x)^2}{D^2}} \simeq D \left(1 + \frac{1}{2} \frac{y^2 + (a/2 - x)^2}{D^2} \right)$$

$$S_2M = \sqrt{D^2 + y^2 + (a/2 + x)^2} = D \sqrt{1 + \frac{y^2 + (a/2 + x)^2}{D^2}} \simeq D \left(1 + \frac{1}{2} \frac{y^2 + (a/2 + x)^2}{D^2} \right)$$

$$S_1M - S_2M = \dots = \frac{ax}{D}.$$

Donc finalement $\delta = \frac{ax}{D}$.

4 – L'éclairement est obtenu à l'aide de la formule de Fresnel (pour des sources d'égales intensités I_0) :

$$I(M) = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \delta \right) \right)$$

$$I(M) = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{ax}{D} \right) \right)$$

Pour l'interfrange on se souvient qu'il apparaît lorsque le cosinus est du type $\cos \left(\frac{2\pi}{i} x \right)$.

Donc ici $i = \frac{\lambda D}{a}$.

5 – Si S est très loin des lentilles, alors S_1 est quasiment en F'_1 et S_2 quasiment en F'_2 . On a alors $S_1S_2 \simeq F'_1F'_2 \simeq O_1O_2$.

13.4 Lentilles de Meslin

[●●●]

13.5 Bilentille de Billet (bis)

[●●●]

Optique : Interférences à N ondes, réseaux

14.1 Question de cours – Formule des réseaux

[●○○]

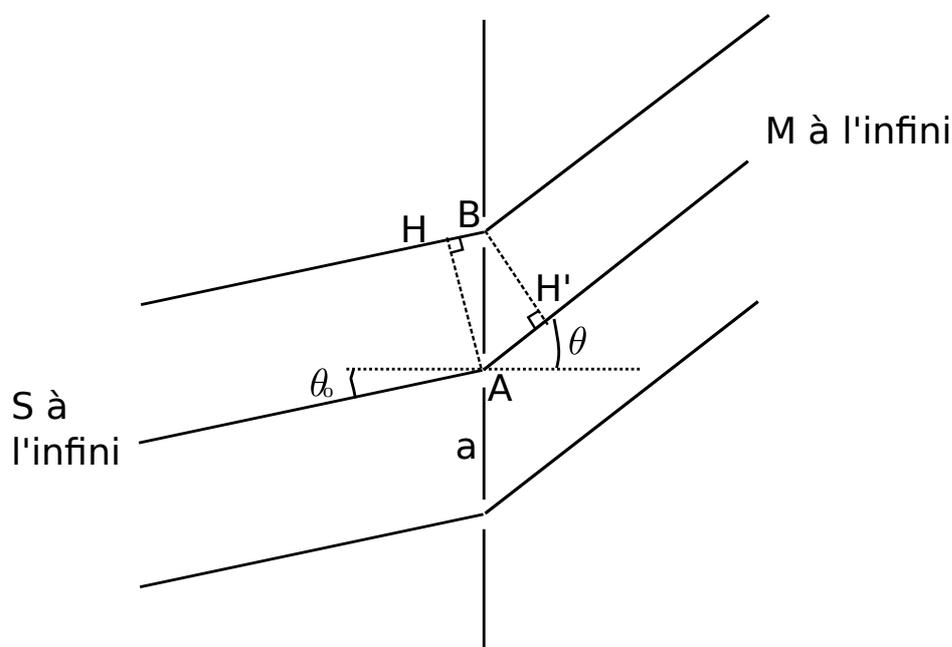
14.1 – Coup de pouce : Pour le calcul de la différence de marche entre deux rayons, tracer deux surfaces d'onde, une pour une source en S , une pour une source en M .

14.1 – Correction

1 – Faire un schéma où apparaissent θ , θ_0 (attention, ce sont les angles par rapport à la normale).

La formule des réseaux donne les directions θ_0, θ_1 , etc. dans lesquelles la lumière est transmise derrière le réseau. Elle s'écrit $\sin \theta_n - \sin \theta_0 = n \frac{\lambda_0}{a}$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

2 –



★ On veut exprimer la différence de marche δ entre deux rayons consécutifs.

D'après le théorème de Malus, la surface HA est une surface d'onde pour une source en S , donc $(SH) = (SA)$.

Et également la surface BH' est une surface d'onde pour une source en M , donc $(BM) = (H'M)$.

On a donc $\delta = (SAM) - (SBM) = (AH') - (HB) = AH' - HB = a \sin \theta - a \sin \theta_0$.

L'ordre d'interférence est $p = \frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{a}{\lambda_0} (\sin \theta - \sin \theta_0)$.

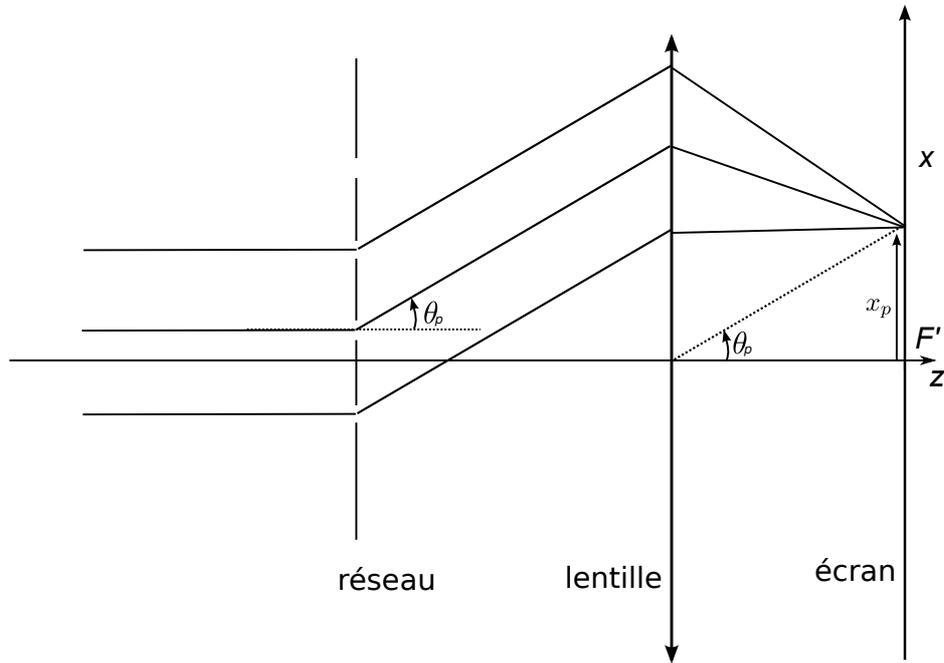
★ Enfin, on dit que l'intensité transmise sera significative seulement si l'ordre d'interférence entre deux rayons consécutifs est entier. Donc pour une direction θ telle que $\frac{a}{\lambda_0} (\sin \theta - \sin \theta_0) = n \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire pour θ_n , $n \in \mathbb{Z}$, tel que

$$\sin \theta_n - \sin \theta_0 = \frac{n a}{\lambda_0}$$

14.2 Mesure de longueur d'onde à l'aide d'un réseau

[○○○]

14.2 – Correction



On a $x_p \simeq f' \theta_p$. Or $\theta_p \simeq \sin \theta_p = p \frac{\lambda}{a}$, d'où finalement $x_p = p \frac{\lambda f'}{a}$.

Pour $p = 1$ on a $x_1 = 15 \text{ cm}$, ce qui est facilement et précisément mesurable.

14.3 Monochromateur à réseau

[●●○]

14.3 – Coup de pouce :

- 1 – Bien repérer les angles sur le schéma de part et d'autre du réseau : celui d'incidence θ_0 et avec la normale, et l'angle θ de sortie également (il est nul sur la figure). La formule des réseaux pour l'ordre -1 donne alors directement un lien entre λ_0 et θ_0 .
- 2 – Bien faire le schéma et la marche des rayons après la lentille L1 afin de voir où tape le faisceau incident dans le plan de la fente.

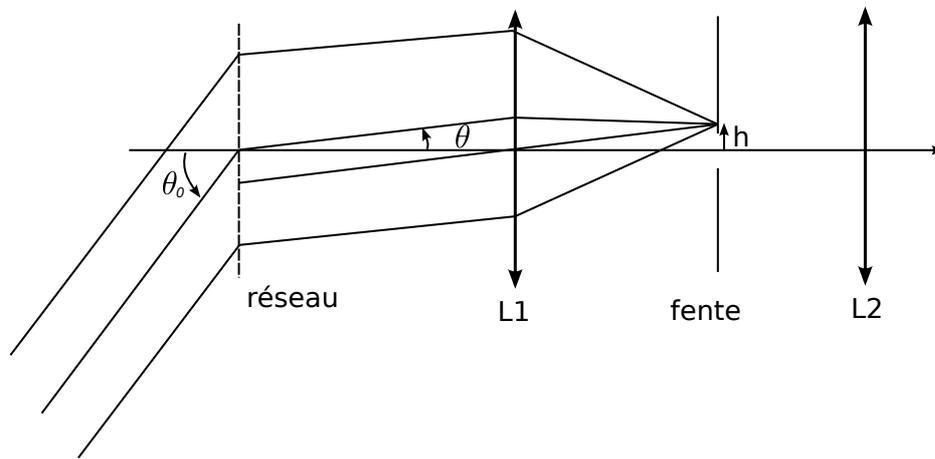
14.3 – Correction

- 1 – Tel qu'est le schéma, l'ordre en sortie est l'ordre -1. L'angle de sortie est nul, donc la formule des réseaux indique que $\sin \theta_{-1} - \sin \theta_0 = (-1) \frac{\lambda_0}{a}$, donc $-\sin \theta_0 = (-1) \frac{\lambda_0}{a}$, donc $\lambda_0 = a \sin \theta_0$ est la longueur d'onde sélectionnée.

A.N. : $\theta_0 = 0.52 \text{ rad}$.

(On peut également dire que l'ordre est $p = +1$, on a alors un angle $\theta_0 < 0$, ce qui est une affaire de conventions.)

- 2 – On a $h = f' \tan \theta \simeq f' \theta$ (voir schéma au-dessous).



La fente laisse donc passer les angles θ compris entre $-\frac{H}{f'}$ et $+\frac{H}{f'}$.

Ceci correspond à des longueurs d'onde $\lambda = a \sin \theta_0 - a \sin \theta$. Or $a \sin \theta_0 = \lambda_0$ d'après 1. Et $a \sin \theta \simeq a\theta$ est compris, pour les angles qui passent la fente, entre $-\frac{aH}{f'}$ et $+\frac{aH}{f'}$.

Donc les longueurs d'onde du faisceau de sortie sont comprises dans $\lambda_0 \pm \frac{aH}{f'}$.

A.N. : $\lambda_0 \pm \frac{aH}{f'} = 500 \pm 5 \text{ nm}$.

- 3** – Idem qu'en 1 mais avec $p = -2$: la longueur d'onde λ'_0 sélectionnée dans l'ordre 2 vérifie $\sin \theta_0 = \frac{2\lambda'_0}{a}$.

C'est gênant car le but d'un monochromateur est de ne laisser passer qu'une seule longueur d'onde.

On voit cependant que cette longueur d'onde passe si et seulement si $\frac{2\lambda'_0}{a} = \sin \theta_0 \leq 1$, donc si et seulement si $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{2\lambda_0}$.

Mais de même, l'ordre -1 ne passe que si $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{\lambda_0}$. Finalement il faut donc $\frac{1}{\lambda_0} > \frac{1}{a} > \frac{1}{2\lambda_0}$, soit a compris entre 1000 et 2000 traits par mm.

Électromagnétisme : Induction

(Voir aussi le TD de révision sur l'induction donné pendant l'année.)

15.1 Amortissement électromagnétique

[●○○]

Coup de pouce : 1 – Se souvenir de la méthode : orienter le circuit (c'est fait sur le schéma), exprimer le flux de \vec{B} à travers le circuit, circuit électrique équivalent, loi des mailles. 2 – Force de Laplace en $i\vec{l} \wedge \vec{B}$.

15.1 – Correction

1 – (i) Orientation : on repère le courant dans le sens de la flèche indiquée sur le schéma. D'après la règle de la main droite, la normale à la surface du contour est donc selon $+\vec{e}_x$.

(ii) Flux de \vec{B} à travers le circuit : $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot dS\vec{n} = az(t) B_0$.

(iii) Circuit électrique équivalent : juste une résistance et un générateur en série. Le générateur à une fem donnée par la loi de Faraday (en convention générateur, donc dans le sens du courant) : $e(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = -a\dot{z} B_0$.

(iv) Loi des mailles dans ce circuit : $e(t) = ri$. On en déduit $i(t) = -\frac{a\dot{z} B_0}{R}$.

2 – La force de Laplace ne s'exerce que là où il y a un champ magnétique.

Sur le côté gauche et le côté droit : $\vec{F} = i(a-z)\vec{e}_z \wedge \vec{B} + i(a-z)(-\vec{e}_z) \wedge \vec{B} = \vec{0}$.

Sur le côté supérieur : $\vec{F} = ia(-\vec{e}_y) \wedge \vec{B} = iaB_0\vec{e}_z$, d'où $\vec{F} = -\frac{a^2\dot{z} B_0^2}{R}$.

3 – On veut mettre cette résultante sous la forme $\vec{F} = -h\vec{v}$.

C'est bien le cas ici avec $h = \frac{(aB_0)^2}{R}$. $h > 0$, on a donc bien une force qui s'oppose à la vitesse et qui sert d'amortissement.

Avec les valeurs données, il faut $B_0 = \frac{\sqrt{Rh}}{a} = 10 \text{ T}$. Ce n'est pas réalisable avec un aimant permanent, mais possible avec un électroaimant assez puissant.

Électromagnétisme : Électrostatique

16.1 Champ créé par une boule pleine, puis creuse

[●○○]

16.1 – Coup de pouce : 1 – Revoir le cours si besoin. On trouve $\vec{E} = \frac{Q_{\text{tot}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$ à l'extérieur de la boule, et $\vec{E} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{e}_r$ à l'intérieur.

2 – Penser au théorème de superposition en décomposant la distribution de charges en deux distributions plus simples.

16.2 Champ créé par un plan uniformément chargé en volume

[●●○]

16.3 Champ créé par une boule chargée non uniformément

[●●○]

16.4 Disque d'accrétion

[●●○]

16.4 – Coup de pouce : En 1 on aboutit à $\vec{E} = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$ selon que l'on est au-dessous ou au-dessus du plan.

On peut retrouver les liens entre formalisme électrostatique et de gravitation avec l'expression bien connue des forces : $\vec{F}_{1\text{sur}2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 d^2} \vec{u}_{1\rightarrow 2}$ et $\vec{F}_{1\text{sur}2} = -\frac{G m_1 m_2}{d^2} \vec{u}_{1\rightarrow 2}$.

On identifie donc m à q , et $1/(4\pi\epsilon_0)$ à $-G$. Reste à trouver l'équivalent de σ : ce sera la masse par unité de surface du disque, à exprimer.

Ainsi en 2.a on arrive à $\vec{g}_d = -2\pi G \rho_d h_d \vec{e}_z$.

16.4 – Correction

1 – $\vec{E} = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$ selon que l'on est au-dessous ou au-dessus du plan.

2 – a – On peut retrouver les liens entre formalisme électrostatique et de gravitation avec l'expression bien connue des forces : $\vec{F}_{1\text{sur}2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 d^2} \vec{u}_{1\rightarrow 2}$ et $\vec{F}_{1\text{sur}2} = -\frac{G m_1 m_2}{d^2} \vec{u}_{1\rightarrow 2}$.

On identifie donc m à q , et $1/(4\pi\epsilon_0)$ à $-G$. Reste à trouver l'équivalent de σ : ce sera la masse par unité de surface du disque, donc $\sigma_d = \frac{dm}{dS} = \rho_d h_d$.

On a donc $\vec{g}_d = \rho_d h_d \times (-2\pi G) \vec{e}_z$ au dessus du disque, l'opposé au dessous.

b – $\vec{g}_* = -\frac{G M_*}{r^2} \vec{u}_r$ avec r la distance entre le point M considéré et le centre O de l'étoile, et \vec{u}_r un vecteur unitaire dirigé selon \vec{OM} .

Le champ de gravité total au point M est donc $\vec{g}_{\text{tot}} = \vec{g}_d + \vec{g}_*$.

c – On veut savoir quand $\|\vec{g}_d\| \ll \|\vec{g}_*\|$. Ceci se réécrit $r^2 \ll \frac{M_*}{2\pi h_d \rho_d}$.

Or $\frac{M_*}{2\pi h_d \rho_d} = \frac{M_* \times R_d^2}{2\pi h_d \rho_d \times R_d^2} = \frac{M_* \times R_d^2}{2M_d} = \frac{99.9\% M_{\text{tot}} \times R_d^2}{2 \times 0.01\% M_{\text{tot}}} = 5 \times 10^3 R_d^2$.

La condition précédente est donc équivalente à $r \ll 70 R_d$.

On peut remarquer que cette condition est toujours satisfaite lorsque l'on est au-dessus du disque, puisqu'alors $r \leq R_d$. Le champ de gravité du disque est donc toujours négligeable devant celui de l'étoile.

16.5 Pesanteur dans le manteau terrestre

[●●○]

Électromagnétisme : Magnétostatique

17.1 Câble parcouru par un courant

[●○○]

17.1 – Coup de pouce : 1 – Revoir le cours si besoin.

2 – Penser au théorème de superposition en décomposant la distribution de courants en deux distributions plus simples.

17.2 Solénoïde infini

[●○○]

17.3 Faisceau de particules

[●○○]

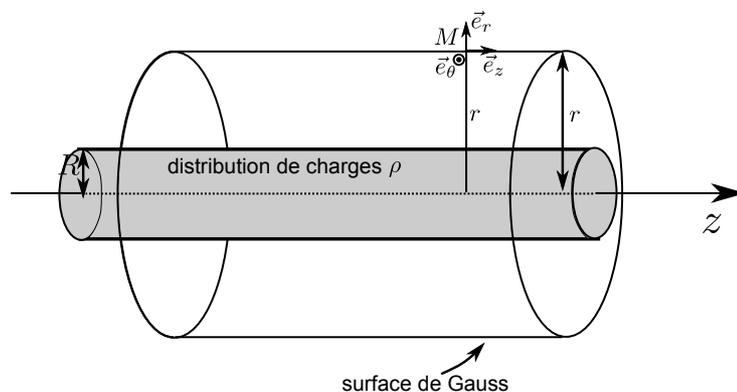
17.3 – Coup de pouce : 1 – $\rho = qn$ ($\text{C} \cdot \text{m}^{-3}$) et $\vec{j} = qn\vec{v}$ ($\text{A} \cdot \text{m}^{-2} = \text{C} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$).

17.3 – Correction

1. On a $\rho = qn$ ($\text{C} \cdot \text{m}^{-3}$) et $\vec{j} = qn\vec{v}$ ($\text{A} \cdot \text{m}^{-2} = \text{C} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$).

Expressions à connaître, ou à retrouver rapidement par analyse dimensionnelle, ou avec un petit raisonnement au moins pour ρ : n donne le nombre de particules par unité de volume, elles sont chacune de charge q , donc la charge par unité de volume est $n \times q$; pour \vec{j} il faudrait faire un bilan à travers une surface S .

2. ★ Système de coordonnées : cylindriques (r, θ, z) .



★ Symétries : On prend un point M quelconque. Les plans $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ et $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ sont plans de symétrie de la distribution de charges (bien préciser qu'il s'agit des charges et non pas des courants, car il y a les deux ici).

Or \vec{E} est contenu dans ces plans.

Donc $\vec{E}(M) = E_r(M)\vec{e}_r = E_r(r, \theta, z)\vec{e}_r$.

★ Invariances : la distribution de charges est invariante par rotation autour de l'axe z (d'angle θ), donc E_r ne dépend pas de θ .

La distribution de charges est également invariante par translation selon l'axe z (car on suppose le faisceau infini). Donc E_r ne dépend pas de z .

Finalement, on a $\boxed{\vec{E} = E_r(r)\vec{e}_r}$.

★ Théorème de Gauss :

- La surface de Gauss est un cylindre d'axe z et de rayon r passant par le point M . On note l sa longueur. Voir schéma ci-dessus.

- Flux de \vec{E} :

$$\begin{aligned} \oiint_{\text{surface cylindre}} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \iint_{\text{surface latérale}} \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ &= \iint_{\text{surface latérale}} E_r(r) \vec{e}_r \cdot dS \vec{e}_r \\ &= E_r(r) \iint_{\text{surface latérale}} dS \\ &= E_r(r) \times 2\pi r l. \end{aligned}$$

- Charge intérieure, deux cas sont à traiter :

- Si $r > R$ le point M est à l'extérieur de la distribution de charges. C'est le cas du schéma.

On a $Q_{\text{int}} = \pi R^2 l \times \rho$.

Le théorème de Gauss indique ensuite que $E_r(r) \times 2\pi r l = \frac{\pi R^2 l \times \rho}{\epsilon_0}$, d'où $E_r(r) =$

$$\frac{R^2 \times \rho}{2\epsilon_0 r} \text{ et } \boxed{\vec{E} = \frac{R^2 \times \rho}{2\epsilon_0 r} \vec{e}_r.}$$

- Si $r < R$ le point M est à l'intérieur de la distribution de charges.

On a $Q_{\text{int}} = \pi r^2 l \times \rho$.

Le théorème de Gauss indique ensuite que $E_r(r) \times 2\pi r l = \frac{\pi r^2 l \times \rho}{\epsilon_0}$, d'où $E_r(r) = \frac{r \times \rho}{2\epsilon_0}$

$$\text{et } \boxed{\vec{E} = \frac{r \times \rho}{2\epsilon_0} \vec{e}_r.}$$

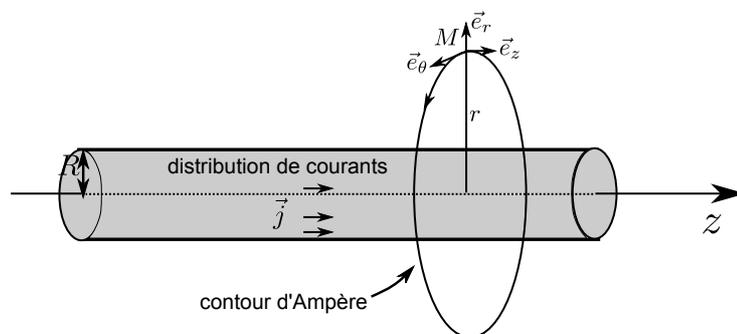
3. Même démarche, mais cette fois c'est le théorème d'Ampère que l'on applique. En allant plus vite (pour les détails voir le cours où cet exemple est traité) :

★ Symétries de la distribution de courants : $\vec{B}(M) = B_\theta(r, \theta, z) \vec{e}_\theta$.

★ Invariances de la distribution de courants : $\vec{B}(M) = B_\theta(r) \vec{e}_\theta$.

★ Théorème d'Ampère :

- Contour d'ampère : cercle comme sur le schéma, orienté dans le sens de \vec{e}_θ .



- Circulation : $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B_\theta(r)$.

- Courant enlacé :

- Si $r > R$ (cas du schéma) alors $I_{\text{enlacé}} = \pi R^2 j$, et finalement on obtient $\vec{B} = \frac{\mu_0 j R^2}{2r} \vec{e}_\theta$.

- Si $r < R$ alors $I_{\text{enlacé}} = \pi r^2 j$, et finalement on obtient $\vec{B} = \frac{\mu_0 j r}{2} \vec{e}_\theta$.

4. Dans le référentiel lié au faisceau, les particules ont une vitesse nulle. On a donc $\vec{j} = \vec{0}$. En revanche ρ est inchangé.

On trouve donc la même chose pour \vec{E} , mais on a cette fois $\vec{B} = \vec{0}$.

Électromagnétisme : Équations de Maxwell

Question de cours diverses

18.1 Question de cours – OPPM [○○○]

18.2 Question de cours – loi d'ohm locale et intégrale [●○○]

18.2 – Coup de pouce : 1 – Il faut arriver à $R = \frac{L}{\gamma S}$.

18.3 Question de cours – Vecteur de Poynting [○○○]

18.4 Chauffage et soudure par induction [●●○]

18.4 – Coup de pouce : 1 – Règle de la main droite : le courant $I(t)$ dans la bobine produit un champ magnétique \vec{B} orienté vers la gauche. 4 – Se souvenir de l'expression de $\frac{d\mathcal{P}}{d\tau}$. Et penser à utiliser la loi d'Ohm locale.

18.4 – Correction

1 - Règle de la main droite : le courant $I(t)$ dans la bobine produit un champ magnétique \vec{B} orienté vers la gauche. L'axe z doit donc pointer vers la gauche.

2 - Le champ \vec{B} varie dans le temps, donc le flux de \vec{B} à travers le métal varie également. D'après la loi de Faraday, ceci va créer une force électromotrice, et donc des courants, qui vont chauffer le matériau par effet Joule.

3 - Équation de Maxwell-Faraday : $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 n \dot{I} \vec{e}_z$.

Et on a également $\text{rot } \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rE_\theta)}{\partial r} \vec{e}_z$, d'où $\frac{\partial(rE_\theta)}{\partial r} = -\mu_0 n \dot{I} r$.

On intègre par rapport à r : $rE_\theta = -\mu_0 n \dot{I} \frac{r^2}{2} + A$, avec A une constante que l'on détermine en prenant $r = 0$: il ne reste alors que $A = 0$.

On a donc $E_\theta(r) = -\mu_0 n \dot{I} \frac{r}{2}$.

4 - On en déduit le courant : $\vec{j} = \gamma \vec{E} = -\gamma \mu_0 n \dot{I} \frac{r}{2} \vec{e}_\theta$.

Et la puissance volumique dissipée par effet Joule : $\frac{d\mathcal{P}}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma \|\vec{E}\|^2$, soit $\frac{d\mathcal{P}}{d\tau} = \frac{1}{4} \gamma \mu_0^2 n^2 \dot{I}^2 r^2$.

5 - On trace. C'est une fonction en r^2 . Elle est maximale lorsque r est maximal, c'est-à-dire en $r = a$ (le bord du barreau).

On trouve alors $\frac{d\mathcal{P}}{d\tau} = 1.5 \times 10^2 \text{ W/m}^3$.

(On a utilisé $\dot{I} = -\omega I_0 \sin(\omega t)$, et on a pris la valeur maximale de ωI_0 .)

18.5 Couche de courants

[●○○]

18.6 Écrantage de Debye dans un plasma

[●●○]

18.6 – Coup de pouce : $2 - \rho = en_i - en_e$. 5 – On peut injecter la forme proposée dans l'équation et voir si cela convient. On trouve $\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{2n_0 e^2}}$.

18.6 – Correction

1 – Potentiel V créé par une charge ponctuelle $+q$ placée à l'origine O du repère : $V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ avec r la distance entre O et M (le r des coordonnées sphériques).

Ceci est valable dans le vide, mais ne sera pas valable dans un plasma.

2 – On a $\rho = en_i(M) + (-e)n_e(M)$.

3 – On utilise l'équation de Poisson pour le potentiel V . C'est possible car le régime est stationnaire.

$$\Delta V = \frac{-\rho}{\epsilon_0}$$

Or ici V ne dépend que de r par symétrie, donc on a :

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2}(rV(r)) = \frac{-\rho}{\epsilon_0} = \frac{-en_0}{\epsilon_0} \left(\exp\left(-\frac{eV(r)}{k_B T}\right) - \exp\left(+\frac{eV(r)}{k_B T}\right) \right).$$

En manipulant ceci on a bien l'équation voulue :

$$\boxed{\frac{d^2}{dr^2}(rV(r)) = \frac{en_0 r}{\epsilon_0} \left(\exp\left(\frac{eV(r)}{k_B T}\right) - \exp\left(-\frac{eV(r)}{k_B T}\right) \right)}.$$

4 – On utilise $\exp(x) \sim x$ pour $x \ll 1$: on a alors

$$\boxed{\frac{d^2}{dr^2}(rV(r)) = \frac{en_0 r}{\epsilon_0} \frac{2eV(r)}{k_B T}}.$$

5 – * On peut vérifier si cette expression fonctionne :

On a alors à gauche : $\frac{d^2}{dr^2}(rV(r)) = \frac{A}{\lambda_D^2} e^{-r/\lambda_D} + \frac{B}{\lambda_D^2} e^{+r/\lambda_D}$.

Et à droite : $\frac{en_0 r}{\epsilon_0} \frac{2eV(r)}{k_B T} = \frac{2e^2 n_0}{\epsilon_0 k_B T} (A e^{-r/\lambda_D} + B e^{+r/\lambda_D})$.

Ceci fonctionne, à condition d'avoir $\frac{1}{\lambda_D^2} = \frac{2e^2 n_0}{\epsilon_0 k_B T}$, soit $\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{2n_0 e^2}}$.

* Déterminons les constantes A et B .

Pour $r \rightarrow +\infty$, notre expression de V diverge, sauf si $B = 0$. On a donc $B = 0$.

On a donc $V(r) = \frac{A}{r} e^{-r/\lambda_D}$.

Pour obtenir A on se place à r très petit. On a alors $V(r) \sim \frac{A}{r}$. Or lorsque l'on est très proche de la charge, l'influence des autres charges du plasma ne doit plus se faire sentir, et tout se passe comme si on avait une unique charge dans le vide. On doit donc retrouver l'expression de la question 1.

On a donc $A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}$, et finalement $V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-r/\lambda_D}$.

6 – $n_0 = n_e \sim 10^{12} \text{ m}^{-3}$ et $T = T_e \sim 10^3 \text{ K}$, d'où $\lambda_D \sim 2 \text{ mm}$.

Électromagnétisme : ondes

19.1 Question de cours – équation de propagation [○○○]

19.2 Puissance rayonnée par une OPPM [●○○]

19.2 – Coup de pouce : 1.a – Par exemple $\vec{E}(M, t) = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x$ (la direction de propagation doit être orthogonale au vecteur \vec{E}).

2 – Se souvenir que l'énergie d'un seul photon de fréquence ν et $h\nu$ avec h la constante de Planck.

19.3 Question de cours – Déterminer l'onde réfléchie [●○○]

19.3 – Correction Voir la démonstration du cours.

19.4 Question de cours – État de surface du conducteur [●○○]

19.4 – Correction Voir la démonstration du cours.

19.5 Pression de radiation et comètes [●●○]

19.5 – Coup de pouce : 1 – Attention, l'intensité I dépend du rayon r (distance roche-Soleil). Pour exprimer comment, faire le lien entre \mathcal{P}_{tot} et I et la surface $4\pi r^2$. 2 – Il sera avantageux pour la suite d'exprimer la masse m en fonction de ρ et de d .

19.5 – Correction

1 - La surface apparente du morceau de roche est $S = \pi(d/2)^2$. La pression exercée par la radiation est $p = 2I/c$. La norme de la force associée est donc $F_{\text{rad}} = Sp = \frac{\pi d^2 I}{2c}$.

Il faut exprimer I , qui est l'intensité de la lumière émise par le Soleil au point considéré. Soit r la distance entre le Soleil et le morceau de roche. La puissance \mathcal{P}_{tot} émise par le Soleil se retrouve intégralement, à la distance r , sur la sphère de rayon r : on a donc $\mathcal{P}_{\text{tot}} = 4\pi r^2 \times I(r)$.

Finalement : $\vec{F}_{\text{rad}} = \frac{1}{8} \frac{\mathcal{P}_{\text{tot}} d^2}{c r^2} \vec{e}_r$, avec \vec{e}_r un vecteur unitaire dirigé depuis le Soleil vers la roche.

2 - Expression connue : $\vec{F}_{\text{grav}} = -\frac{GMm}{r^2} \vec{e}_r$, et pour la suite on remplacera $m = \rho \frac{4}{3} \pi (d/2)^3$.

3 - $\vec{F}_{\text{rad}} > \vec{F}_{\text{grav}} \Leftrightarrow d < \frac{3}{4\pi} \frac{\mathcal{P}_{\text{tot}}}{\rho GMc}$.

Le diamètre critique est donc $d_c = \frac{3}{4\pi} \frac{\mathcal{P}_{\text{tot}}}{\rho GMc} = 2.4 \mu\text{m}$.

4 - Pour des morceaux de roche plus petits que d_c , c'est la force de radiation du Soleil qui domine par rapport à son attraction gravitationnelle. C'est le cas par exemple pour des morceaux de glace arrachés de la surface des comètes, ce qui est responsable en partie de leur queue. Ainsi, cette queue n'est pas dans une direction opposée à la trajectoire de la comète (ce n'est pas une trainée due aux frottements avec le milieu ambiant), mais opposé à la lumière du Soleil.

19.6 Pertes par effet joule lors d'une réflexion

[●●○]

Correction

1 - La puissance volumique dissipée par effet joule dans le conducteur est $\frac{d\mathcal{P}}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\gamma} \vec{j} \cdot \vec{j} =$

$$\frac{1}{\gamma \delta^2} \vec{j}_s \cdot \vec{j}_s, \text{ soit } \frac{d\mathcal{P}}{d\tau} = \frac{4\epsilon_0^2 c^2 E_0^2 \cos^2(\omega t)}{\gamma \delta^2}.$$

La valeur moyenne est donc $\langle \frac{d\mathcal{P}}{d\tau} \rangle = \frac{2\epsilon_0^2 c^2 E_0^2}{\gamma \delta^2} = \epsilon_0^2 c^2 E_0^2 \omega = \epsilon_0 E_0^2 \omega.$

On retient donc $\boxed{\langle \frac{d\mathcal{P}}{d\tau} \rangle = \epsilon_0 E_0^2 \omega.}$

2 - Pour un conducteur de surface S , le volume dans lequel il y a présence de courants non nuls est $\tau = \delta S$, donc la puissance moyenne dissipée est $\mathcal{P} = \langle \frac{d\mathcal{P}}{d\tau} \rangle \times \tau = S \delta \epsilon_0 E_0^2 \omega.$

3 - L'onde incidente se propage dans le vide. Elle est du type $\vec{E} = E_0 \vec{e}_z \cos(\omega t - kx)$ (on place un axe x qui va du vide vers le conducteur, il faut évidemment faire un schéma au tableau). Le vecteur d'onde est donc $\vec{k} = k \vec{e}_x$, et on rappelle la relation $\omega/k = c$ valable pour une OPPM dans le vide.

Le champ magnétique est alors donné par $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = -\frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y.$

Le vecteur de Poynting est $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kx).$

Sa valeur moyenne est $\|\langle \vec{\Pi} \rangle\| = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} = \frac{c \epsilon_0 E_0^2}{2}.$

4 - La puissance incidente sur la surface S du conducteur est donc $\mathcal{P}_i = S \times \|\langle \vec{\Pi} \rangle\| = \frac{c S \epsilon_0 E_0^2}{2}.$

5 - $\alpha = \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_i} = 2\delta \frac{\omega}{c} = 2\delta \frac{k c}{c} = 4\pi \frac{\delta}{\lambda},$ d'où $\boxed{\alpha = 4\pi \frac{\delta}{\lambda}.}$

Pour une onde dans le visible avec $\lambda \simeq 500 \text{ nm}$, on a $\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{c}{\lambda} = 3.8 \times 10^{15} \text{ rad/s}$, et donc $\delta = 2.6 \text{ nm}$. D'où $\boxed{\alpha = 5.2 \times 10^{-3}.}$

6 - Si l'onde arrive sur un miroir avec une intensité I_0 , elle repart avec une intensité $(1 - \alpha)I_0$, puis après une seconde réflexion avec une intensité $(1 - \alpha)I_0$, puis après n réflexions avec une intensité $(1 - \alpha)^n I_0$.

On cherche donc n tel que $(1 - \alpha)^n = 0.9$. On a donc $n = \frac{\ln 0.9}{\ln(1 - \alpha)} = 20$ réflexions.

20 réflexions correspondent à 10 aller-retour, donc à un parcours de 1 m, et à un temps $t = \frac{d}{c} = 3.3 \text{ ns}.$

19.7 Question de cours – Onde confinée dans une cavité

[●○○]

19.8 Pression de radiation

[●●○○]

Chimie : Chimie des solutions (1^{re} année)

20.1 Précipitation et solubilité

[●○○]

20.1 – Coup de pouce : 1 – Il faut écrire l'équation de la réaction, sa constante d'équilibre, faire un tableau d'avancement dans lequel on fait apparaître la solubilité s (en mol/L) qui est la concentration à l'équilibre. Puis on détermine s à l'aide de $Q_r = K^0$.

2 – La question signifie qu'il y a déjà, initialement, une concentration $x_0 = 0.10$ mol/L de $\text{CrO}_4^{2-}(\text{aq})$. Ceci modifie le tableau d'avancement.

20.1 – Correction

1 – La réaction de dissolution est $\text{FeCrO}_4(\text{s}) = \text{Fe}_{(\text{aq})}^{2+} + \text{CrO}_4^{2-}(\text{aq})$, de constante d'équilibre K_s .

La solubilité est la concentration à l'équilibre : $s = [\text{Fe}_{(\text{aq})}^{2+}] = \frac{\xi}{V}$.

Tableau d'avancement en concentration :

	$\text{FeCrO}_4(\text{s})$	$= \text{Fe}_{(\text{aq})}^{2+}$	$+ \text{CrO}_4^{2-}(\text{aq})$
<i>E.I.</i>	excès	0	0
<i>E.F.</i>	excès	s	s

On suppose que le solide n'est pas entièrement consommé, si bien que l'état final est un état d'équilibre. On a alors $K_s = s \times s$, d'où $s = \sqrt{K_s} = 4.6 \times 10^{-4}$ mol/L.

2 – Même chose mais cette fois :

	$\text{FeCrO}_4(\text{s})$	$= \text{Fe}_{(\text{aq})}^{2+}$	$+ \text{CrO}_4^{2-}(\text{aq})$
<i>E.I.</i>	excès	0	x_0
<i>E.F.</i>	excès	s	$x_0 + s$

Avec $x_0 = 0.10$ mol/L. On a donc $K_s = s(s + x_0)$. On en déduit $s = 2.1 \times 10^{-6}$ mol/L.

20.2 Dosage par suivi potentiométrique

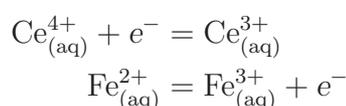
[●○○]

Exercice donné dans le poly de révision sur l'oxydoréduction, que vous pouvez d'ailleurs relire.

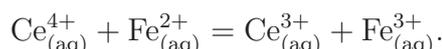
20.2 – Coup de pouce : 1 – Pour obtenir la constante d'équilibre en fonction des E^0 , il faut écrire les relations de Nernst associées à chaque demi-équation, puis les combiner pour faire apparaître $K^0 = Q_r = [\text{Ce}^{3+}][\text{Fe}^{3+}]/([\text{Ce}^{4+}][\text{Fe}^{2+}])$.

20.2 – Correction

1 – La réaction a lieu entre les ions Ce^{4+} et Fe^{2+} . Il faut écrire les deux demi-équations concernées, en faisant en sorte que le nombre d'électrons dans chacune soit le même, et les sommer :



D'où :



La constante d'équilibre est

$$K^0 = 10^{1 \times (E_{\text{Cr}^{4+}/\text{Cr}^{3+}}^0 - E_{\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}}^0) / 0.06} = 1.47 \times 10^{16}.$$

La réaction est donc totale.

2 – Tableau d'avancement (V est le volume de solution de cérium versé depuis la burette dans le bécher) :

	$\text{Cr}_{(\text{aq})}^{4+} +$	$\text{Fe}_{(\text{aq})}^{2+} =$	$\text{Cr}_{(\text{aq})}^{3+} +$	$\text{Fe}_{(\text{aq})}^{3+}$
$V = 0$	0	$c_0 V_0$	0	$\simeq 0$
$V < V_{\text{éq}}$	$\simeq 0$	$c_0 V_0 - c_B V$	$c_B V$	$c_B V$
$V = V_{\text{éq}}$	$\simeq 0$	$\simeq 0$	$c_B V_{\text{éq}}$	$c_B V_{\text{éq}}$
$V > V_{\text{éq}}$	$c_B(V - V_{\text{éq}})$	$\simeq 0$	$c_B V_{\text{éq}}$	$c_B V_{\text{éq}}$

À l'équivalence, les réactifs sont introduits en proportions stœchiométriques, donc

$$\frac{n_{\text{Fe}^{2+} \text{ initial}}}{1} = \frac{n_{\text{Ce}^{4+} \text{ versé}}}{1},$$

soit donc ici :

$$\frac{c_0 V_0}{1} = \frac{c_B V_{\text{éq}}}{1}.$$

D'où on déduit que $c_0 = \frac{c_B V_{\text{éq}}}{V_0}$.

Sur le graphique on mesure $V_{\text{éq}} = 18 \text{ mL}$. On a donc

$$c_0 = \frac{c_B V_{\text{éq}}}{V_0} = \frac{0.10 \times 18}{50} = 3.6 \times 10^{-2} \text{ mol/L}.$$

3 – Non, aucun, car tout dépend de $n_{\text{Fe}^{2+} \text{ initial}} = c_0 V_0$ avec $V_0 = 50 \text{ mL}$ prélevé au départ, et cette quantité $c_0 V_0$ ne change pas si on ajoute de l'eau.

Chimie : 1^{er} principe ; Équilibre chimique

21.1 Question de cours – Enthalpie standard de réaction

[○○○]

21.1 – Correction

1 – On utilise la loi de Hess :

$$\Delta_r H^0 = \Delta_f H^0(\text{ZnO}_{(s)}) + \Delta_f H^0(\text{SO}_{2(g)}) - \Delta_f H^0(\text{ZnS}_{(s)}) - \frac{3}{2} \Delta_f H^0(\text{O}_{2(g)})$$

2 – On rappelle que la réaction a lieu à 100°C sous 50 bar.

- $\text{O}_{2(g)}$ est un gaz : son état standard est $\text{O}_{2(g)}$ pur à $T = 100^\circ\text{C}$ sous 1 bar, se comportant comme un gaz parfait.
- $\text{SO}_{2(g)}$ est aussi un gaz : son état standard est $\text{SO}_{2(g)}$ pur à $T = 100^\circ\text{C}$ sous 1 bar, se comportant comme un gaz parfait.
- $\text{ZnO}_{(s)}$ est un solide : son état standard est $\text{ZnO}_{(s)}$ pur à $T = 100^\circ\text{C}$ sous 1 bar.
- $\text{ZnS}_{(s)}$ est un solide : son état standard est $\text{ZnS}_{(s)}$ pur à $T = 100^\circ\text{C}$ sous 1 bar.

3 – On considère un avancement ξ de la réaction ci-dessus. On suppose qu'elle se déroule de façon isotherme. La variation d'enthalpie du système {ensemble des constituants physico-chimiques} est :

$$\Delta H = \xi \times \Delta_r H^0(T).$$

21.2 Question de cours – Réaction standard de formation

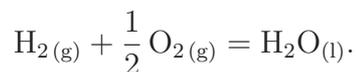
[○○○]

21.2 – Correction

1 – On s'intéresse à $\text{H}_2\text{O}_{(l)}$ à $T = 25^\circ\text{C}$. Les éléments qui constituent cette espèce chimique sont H et O.

Il faut partir de ces éléments pris dans leur état standard de référence à 50°C, à savoir : $\text{H}_{2(g)}$ et $\text{O}_{2(g)}$.

La réaction est donc :



(Attention, il faut former un seul $\text{H}_2\text{O}_{(l)}$.)

2 – L'enthalpie standard de réaction associée à la réaction précédente est justement $\Delta_r H^0 = \Delta_f H^0(\text{H}_2\text{O}_{(l)})$.

Puisqu'elle est négative, cette réaction est exothermique.

21.3 Question de cours – Loi d'action des masses

[○○○]

21.3 – Correction

1 – En phase gazeuse : $a_i = \frac{p_i}{p^0}$, en solution : $a_i = \frac{c_i}{c^0}$ (ou 1 si c'est le solvant), liquide ou solide pur : $a_i = 1$, liquide ou solide dans un mélange : $a_i = x_i = \frac{n_i}{n_{tot}}$.

2 – La loi d'action des masses indique qu'à l'équilibre, on a $Q_r = K^0$, avec :

- K^0 la constante d'équilibre de la réaction (elle dépend de la température seulement).
- Q_r le quotient de réaction, $Q_r = \frac{(a(C))^\gamma (a(D))^\delta}{(a(A))^\alpha (a(B))^\beta}$ pour une équation de réaction du type $\alpha A + \beta B = \gamma C + \delta D$.

3 – Loi de Van-t Hoff : $\frac{dK^0(T)}{dT} = \frac{\Delta_r H^0}{RT^2}$. On suppose que $\Delta_r H^0$ ne dépend pas de la température.

On primitive une fois : on a donc $K^0(T) = -\frac{\Delta_r H^0}{RT} + A$ avec A une constante.

On détermine A avec $K^0(T_1) = -\frac{\Delta_r H^0}{RT_1} + A$, donc $A = K^0(T_1) + \frac{\Delta_r H^0}{RT_1}$.

D'où

$$K^0(T) = K^0(T_1) + \frac{\Delta_r H^0}{RT_1} - \frac{\Delta_r H^0}{RT}.$$

On prend enfin $T = T_2$ pour avoir le résultat voulu.

(**Remarque** : on pouvait aussi intégrer la relation de Van't Hoff entre T_1 et T_2 : $\int_{T_1}^{T_2} \frac{dK^0(T)}{dT} dT =$

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{\Delta_r H^0}{RT^2} dT, \text{ etc...})$$

4 – Le principe de modération de Le Châtelier indique que lors d'une élévation de la température, l'équilibre est déplacé dans le sens endothermique. Et lors d'un abaissement de température, il est déplacé dans le sens exothermique.

21.4 Synthèse de l'acide fluorhydrique

[●○○]

21.4 – Coup de pouce : 1 – Pas de réaction chimique pour cette question, on s'intéresse uniquement au chauffage des réactif : utiliser $\Delta H = Q_{reçu}$. 3 – Il faut faire un tableau d'avancement (et attention, les proportions initiales ne sont pas stœchiométriques). 5 – Principe de Le Châtelier.

21.4 – Correction

1 – Dans cette question on s'intéresse uniquement au chauffage des réactifs. Il n'y a pas de réaction chimique.

On a :

- $m_1 = 220 \text{ kg}$ de $\text{CaF}_2(s)$, soit $n_{10} = \frac{m_1}{M_{\text{CaF}_2}} = 2817 \text{ mol}$.
- $m_2 = 280 \text{ kg}$ de $\text{H}_2\text{SO}_4(l)$, soit $n_{20} = \frac{m_2}{M_{\text{H}_2\text{SO}_4}} = 2857 \text{ mol}$.

Pour déterminer l'énergie thermique reçue par le système {les réactifs} il faut appliquer le premier principe à ce système, version isobare car la pression est $p = 1$ bar constante :

$$\Delta H = W' + Q_{\text{reçu}},$$

avec $W' = 0$ (travaux autres que ceux des forces de pression), et $\Delta H = C_{p,\text{tot}}\Delta T$ car il s'agit de phases condensées (qu'on doit supposer incompressibles indilatables).

De plus, $C_{p,\text{tot}} = n_{10} C_{pm}^0(\text{CaF}_2) + n_{20} C_{pm}^0(\text{H}_2\text{SO}_4)$.

Finalement,

$$Q_{\text{reçu}} = (n_{10} C_{pm}^0(\text{CaF}_2) + n_{20} C_{pm}^0(\text{H}_2\text{SO}_4)) \times (T_f - T_i) = 1.61 \times 10^8 \text{ J.}$$

2 – Loi de Hess et utilisation des données du tableau. On trouve $\Delta_r H^0 = 69.8 \text{ kJ/mol.}$

3 – Il faut faire un tableau d'avancement. On a calculé les quantités initiales n_{10} et n_{20} dans la question 1. On voit en particulier que ce ne sont pas des proportions stœchiométriques.

	$\text{CaF}_2(\text{s})$	$+ \text{H}_2\text{SO}_4(\text{l})$	$= 2\text{HF}(\text{g})$	$+ \text{CaSO}_4(\text{s})$
E.I.	n_{10}	n_{20}	0	0
$\xi(t)$	$n_{10} - \xi$	$n_{20} - \xi$	2ξ	ξ
E.F.	$n_{10} - \xi_f$	$n_{20} - \xi_f$	$2\xi_f$	ξ_f

La réaction est supposée totale. On voit que le réactif limitant est $\text{CaF}_2(\text{s})$.

Dans l'état final on a donc $\xi_f = n_{10} = 2817 \text{ mol}$. On en déduit à l'aide de la dernière ligne du tableau :

- Pour $\text{CaF}_2(\text{s})$, $n_1 = 0 \text{ mol}$, soit $m_1 = 0 \text{ kg}$.
- Pour $\text{H}_2\text{SO}_4(\text{l})$, $n_2 = n_{20} - \xi_f = 40 \text{ mol}$, soit $m_2 = n_2 M = 3.92 \text{ kg}$.
- Pour $\text{HF}(\text{g})$, $n_3 = 2\xi_f = 5634 \text{ mol}$.
- Pour $\text{CaSO}_4(\text{s})$, $n_4 = \xi_f = 2817 \text{ mol}$, soit $m_4 = n_4 M = 383.1 \text{ kg}$.

Enfin, la pression totale est due au seul gaz en présence ($\text{HF}(\text{g})$). On utilise la loi des gaz parfaits : $p = n_3 RT/V$. On a $T = 573 \text{ K}$, et $V = \pi(1.5)^2 \times 20 \text{ m}^3$. On trouve $p = 1.9 \text{ bar.}$

4 – La transformation étant monobare avec $p_{\text{ini}} = p_{\text{fin}} = p_{\text{ext}}$, on peut utiliser le premier principe version monobare, appliqué au système {ensemble des constituants physico-chimiques} :

$$\Delta H = W' + Q_{\text{reçu}} = Q_{\text{reçu}}.$$

D'autre part, la transformation étant isotherme, et l'avancement totale étant ξ_f , on a $\Delta H = \xi_f \Delta_r H^0$.

D'où une énergie thermique reçue par le système :

$$Q_{\text{reçu}} = \Delta H = \xi_f \Delta_r H^0 = 1.97 \times 10^5 \text{ kJ.}$$

Le transfert thermique cédé au milieu extérieur est l'opposé : $Q_{\text{cédé}} = -1.97 \times 10^5 \text{ kJ.}$

On ne peut pas se passer de chauffage, puisque la transformation est endothermique ($Q_{\text{cédé}} < 0$), elle a donc tendance à refroidir le milieu, et non pas à le réchauffer.

- 5 –
- Pour la température, le principe de Le Châtelier indique que pour une augmentation de la température, l'équilibre est déplacé dans le sens endothermique. Quel est le sens endothermique ici ? Pour cette réaction $\Delta_r H^0 > 0$, elle est donc endothermique. Le sens endothermique est donc le sens direct. Il faut donc augmenter la température pour améliorer le rendement thermodynamique.

- Pour la pression, le principe de Le Châtelier indique que pour une augmentation de la pression, l'équilibre est déplacé dans le sens qui diminue le nombre de mole de gaz. De quel sens s'agit-il ici ? Il s'agit du sens indirect, puisqu'il y a deux molécules de gaz à droite de l'équation de réaction et aucune à gauche. Il faut donc au contraire diminuer la pression pour déplacer l'équilibre dans le sens direct, et ainsi augmenter le rendement thermodynamique.

21.5 Dissociation de l'oxyde d'argent

[●●○]

21.5 – Coup de pouce : 1 et 2 : il faut faire un tableau d'avancement. Calculer l'avancement ξ_{\max} (avancement maximal si la réaction est totale), et calculer $\xi_{\text{éq}}$ si l'équilibre est atteint (avec $K^0 = Q_r$). Puis voir s'il est effectivement possible que l'équilibre soit atteint (pas possible si $\xi_{\text{éq}} > \xi_{\max}$).

21.5 – Correction

Tableau d'avancement :

	$2 \text{ AgO}_{(s)}$	$=$	$4 \text{ Ag}_{(s)}$	$+ \text{ O}_{2(g)}$
E.I.	n_0		0	0
E.F.	$n_0 - 2\xi_f$		$4\xi_f$	ξ_f

1 - Il y a présence d'une phase condensée dans les réactifs, et il peut donc y avoir rupture d'équilibre si elle est entièrement consommée. Il faut donc calculer ξ_{\max} , $\xi_{\text{éq}}$, et comparer les deux.

★ **Calcul de ξ_{\max} :** on suppose la réaction totale.

L'avancement correspond à la consommation totale du réactif solide $\text{AgO}_{(s)}$. On a donc

$$n_0 - 2\xi_{\max} = 0, \text{ soit } \boxed{\xi_{\max} = \frac{n_0}{2} = 5.0 \times 10^{-3} \text{ mol}}.$$

★ **Calcul de $\xi_{\text{éq}}$:** on suppose l'équilibre atteint.

Cet avancement correspond à l'avancement tel que $Q_r = K^0$.

D'après le tableau d'avancement, on a $\xi_{\text{éq}} = n_{\text{O}_2}$. Il faut donc calculer n_{O_2} si l'équilibre est atteint.

Le quotient de réaction est $Q_r = \frac{p_{\text{O}_2}}{p^0}$. On en déduit donc $p_{\text{O}_2} = p^0 K^0 = 2.35 \times 10^3 \text{ Pa}$.

On en déduit la quantité de matière de $\text{O}_{2(g)}$ à l'aide de la loi des gaz parfaits : $n_{\text{O}_2} = \frac{p_{\text{O}_2} V}{RT}$.

$$\text{D'où } \boxed{\xi_{\text{éq}} = \frac{p_{\text{O}_2} V}{RT} = 1.52 \times 10^{-3} \text{ mol}}.$$

★ **Comparaison entre ξ_{\max} et $\xi_{\text{éq}}$:** On a $\xi_{\max} > \xi_{\text{éq}}$, donc l'état d'équilibre est possible (à l'équilibre, il reste du solide).

Ainsi, l'état final est un état d'équilibre, $\boxed{\xi_f = \xi_{\text{éq}} = 1.52 \times 10^{-3} \text{ mol}}$.

On en déduit dans l'état final : $n_{\text{Ag}_2\text{O}} = n_0 - 2\xi_f = 6.96 \times 10^{-3} \text{ mol}$, $n_{\text{Ag}} = 4\xi_f = 6.10 \times 10^{-3} \text{ mol}$, et $n_{\text{O}_2} = \xi_f = 1.52 \times 10^{-3} \text{ mol}$.

2 - * Si $n_0 = 0.5 \times 10^{-3}$ mol, alors le calcul de ξ_{\max} change et donne $\xi_{\max} = \frac{n_0}{2} = 0.25 \times 10^{-3}$ mol.

* On a toujours $\xi_{\text{éq}} = 1.52 \times 10^{-3}$ mol (aucun changement dans le calcul précédent).

* Cette fois, on a $\xi_{\max} < \xi_{\text{éq}}$. Tout le solide est donc consommé dans l'état final. Il y a rupture d'équilibre. On a donc $\xi_f = \xi_{\max} = 0.25 \times 10^{-3}$ mol.

On en déduit dans l'état final : $n_{\text{Ag}_2\text{O}} = 0$, $n_{\text{Ag}} = 4\xi_f = 1.0 \times 10^{-3}$ mol, et $n_{\text{O}_2} = \xi_f = 0.25 \times 10^{-3}$ mol.

3 - Il faut écrire le quotient de réaction, dans lequel on fait apparaître le volume V :

$$Q_r = \frac{p_{\text{O}_2}}{p^0} = \frac{n_{\text{O}_2}RT}{V p^0}.$$

L'équilibre étant atteint, on a $Q_r = K^0$.

Si on augmente V , alors Q_r diminue, donc on a $Q_r < K^0$ et pour retourner à l'équilibre l'équation avance dans le sens direct.

Augmenter le volume déplace donc l'équilibre dans le sens direct.

21.6 Coefficient de dissociation

[●○○]

21.6 – Coup de pouce : Tableau d'avancement. Utiliser $Q_r = K^0$.

21.6 – Correction

Tableau d'avancement :

	$\text{PCl}_5(\text{g})$	$=$	$\text{PCl}_3(\text{g})$	$+ \text{Cl}_2(\text{g})$	$n_{\text{tot,gaz}}$
E.I.	n_0		0	0	n_0
E.F.	$n_0 - \xi = n_0(1 - \alpha)$		$\xi = n_0\alpha$	$\xi = n_0\alpha$	$n_0 + \xi = n_0(1 + \alpha)$

1 - On peut utiliser la loi des gaz parfait pour la totalité du gaz : $p_{\text{tot}}V = n_{\text{tot,gaz}}RT$. Or $n_{\text{tot,gaz}} = n_0(1 + \alpha)$.

On peut alors isoler α : $\alpha = \frac{p_{\text{tot}}V}{n_0RT} - 1 = 0.79$.

2 - Après quelques manipulations, le quotient de réaction se met sous la forme $Q_r = \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2} \frac{p_{\text{tot}}}{p^0}$.

À l'équilibre, on a donc $K^0 = Q_r = \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2} \frac{p_{\text{tot}}}{p^0} = 3.32$.

21.7 Propulsion fusée

[●●○]

21.7 – Correction

1 - On utilise la loi de Hess : $\Delta_r H^0 = \dots = -1766.8$ kJ/mol (à écrire complètement).

Le signe négatif indique que la réaction est exothermique.

2 - Il s'agit d'un calcul de température de flamme. On commence par un tableau d'avancement, avec des réactifs en proportions stœchiométriques comme indiqué dans l'énoncé :

	$\text{C}_2\text{H}_8\text{N}_2(\text{l}) +$	$2\text{N}_2\text{O}_4(\text{l}) =$	$2\text{CO}_2(\text{g}) +$	$4\text{H}_2\text{O}(\text{g}) +$	$3\text{N}_2(\text{g})$	
E.I.	n_0	$2n_0$	0	0	0	$T_i = 298\text{ K}$
état fictif	0	0	$2n_0$	$4n_0$	$3n_0$	$T_i = 298\text{ K}$
E.F.	0	0	$2n_0$	$4n_0$	$3n_0$	$T_f = ?$

On applique le premier principe au système {enceinte + constituants physico chimiques}, version isobare (c'est bien le cas ici), **entre les états E.I. et E.F.** : $\Delta H = Q_{\text{reçu}}$.

Or ici $Q_{\text{reçu}} = 0$ car l'enceinte est calorifugée. Donc $\Delta H = 0$.

On décompose ensuite en deux étapes :

- **Étape de E.I. à l'état fictif** : la réaction chimique a lieu de façon isotherme à T_i .
La variation d'enthalpie associée est $\Delta H_1 = \xi_{\text{max}} \Delta_r H^0(T_1)$ car la réaction est isobare et isotherme.
Or ici l'avancement maximal est $\xi_{\text{max}} = n_0$ (car pour cet avancement on a consommé tout $\text{C}_2\text{H}_8\text{N}_2(\text{l})$ et tout $2\text{N}_2\text{O}_4(\text{l})$).
Donc $\Delta H_1 = n_0 \Delta_r H^0(T_1)$.
- **Étape de l'état fictif à E.F.** : pas de réaction, mais échauffement du système {enceinte + constituants physico-chimiques} de T_i à T_f .
On a donc $\Delta H_2 = C_{p,\text{tot}}(T_f - T_i)$ (car les gaz sont considérés parfaits et car les liquides sont des phases condensées), avec $C_{p,\text{tot}} = 3n_0 C_{p,m}^0(\text{N}_2(\text{g})) + 2n_0 C_{p,m}^0(\text{CO}_2(\text{g})) + 4n_0 C_{p,m}^0(\text{H}_2\text{O}(\text{g}))$.

Enfin, H étant une fonction d'état on a $0 = \Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2$.

On en déduit

$$T_f = T_i + \frac{-\Delta_r H^0}{3 C_{p,m}^0(\text{N}_2(\text{g})) + 2 C_{p,m}^0(\text{CO}_2(\text{g})) + 4 C_{p,m}^0(\text{H}_2\text{O}(\text{g}))} = 5.8 \times 10^3 \text{ K}$$

Cette température est la température maximale que l'on peut espérer atteindre. Elle sera plus basse en réalité à cause :

- Des pertes thermiques (l'enceinte n'est pas parfaitement calorifugée).
- Les $C_{p,m}^0$ dépendent en fait de la température, et augmentent avec T . Ceci a pour effet de faire baisser la température finale. En prenant ceci en compte on trouverait $T_f = 4.2 \times 10^3 \text{ K}$.
- À ces températures les réactifs se dissocient, et les atomes s'ionisent, ce qui consomme une partie de l'énergie libérée par la réaction chimique.

3 - On considère qu'il y a 1 mole de $\text{C}_2\text{H}_8\text{N}_2(\text{l})$ pour 1 mole de $\text{N}_2\text{O}_4(\text{l})$. On modifie donc le tableau d'avancement :

	$\text{C}_2\text{H}_8\text{N}_2(\text{l}) +$	$2\text{N}_2\text{O}_4(\text{l}) =$	$2\text{CO}_2(\text{g}) +$	$4\text{H}_2\text{O}(\text{g}) +$	$3\text{N}_2(\text{g})$	
E.I.	n_0	n_0	0	0	0	$T_i = 298\text{ K}$
avancement ξ	$n_0 - \xi$	$n_0 - 2\xi$	2ξ	4ξ	3ξ	$T_i = 298\text{ K}$
état fictif ($\xi = \xi_{\text{max}} = \frac{n_0}{2}$)	$\frac{n_0}{2}$	0	n_0	$2n_0$	$\frac{3}{2}n_0$	$T_i = 298\text{ K}$
E.F.	$\frac{n_0}{2}$	0	n_0	$2n_0$	$\frac{3}{2}n_0$	$T_f = ?$

La réaction est supposée totale. On a calculé l'avancement maximal en regardant qui est le réactif limitant. On voit ici que c'est $\text{N}_2\text{O}_{4(l)}$ qui est consommé entièrement en premier, et que ceci arrive pour $n_0 - 2\xi = 0$, soit pour $\xi = \xi_{\max} = \frac{n_0}{2}$. On calcule alors les quantités de produits en conséquence.

On procède ensuite exactement comme précédemment : $0 = \Delta H_1 + \Delta H_2$, avec

- Étape de E.I. à l'état fictif : $\Delta H_1 = \xi_{\max} \Delta_r H^0 = \frac{n_0}{2} \Delta_r H^0$.
- Étape de l'état fictif à E.F. : échauffement du système {enceinte + constituants physico-chimiques} de T_i à T_f .

On a donc $\Delta H_2 = C_{p,\text{tot}}(T_f - T_i)$, avec

$$C_{p,\text{tot}} = \frac{1}{2}n_0 C_{p,m}^0(\text{C}_2\text{H}_8\text{N}_2(l)) + \frac{3}{2}n_0 C_{p,m}^0(\text{N}_2(g)) + n_0 C_{p,m}^0(\text{CO}_2(g)) + 2n_0 C_{p,m}^0(\text{H}_2\text{O}(g)).$$

(On prend bien en compte les réactifs restants.)

Finalement on a

$$T_f = T_i + \frac{-\frac{1}{2} \Delta_r H^0}{\frac{1}{2} C_{p,m}^0(\text{C}_2\text{H}_8\text{N}_2(l)) + \frac{3}{2} C_{p,m}^0(\text{N}_2(g)) + C_{p,m}^0(\text{CO}_2(g)) + 2 C_{p,m}^0(\text{H}_2\text{O}(g))} = 3.9 \times 10^3 \text{ K}$$

C'est plus bas que pour un mélange initial stœchiométrique. C'est normal car à la fin il reste des réactifs à chauffer, ce qui fait augmenter la capacité thermique totale et donc diminuer la température finale.

L'intérêt du mélange stœchiométrique est donc d'éviter d'avoir des restes de réactifs, et donc de maximiser la température finale.

Chimie : Diagrammes E-pH

22.1 Question de cours – diagramme de l'eau [●○○]

22.2 E-pH zinc [●○○]

22.3 E-pH fer [●○○]

22.4 E-pH argent [●○○]

22.5 E-pH chlore [●●○○]

22.5 – Correction

1 - ★ Il faut d'abord déterminer les nombres d'oxydation de l'élément chlore dans chaque espèce chimique. On utilise le fait que dans les cas présents, le n.o. de l'élément H est +I, et celui de O est -II, et le fait que la somme des n.o. est égale à la charge électrique totale de l'espèce chimique.

On a donc un n.o. de -I pour Cl^- , un n.o. de 0 pour Cl_2 , et un n.o. de +I pour HClO et ClO^- .

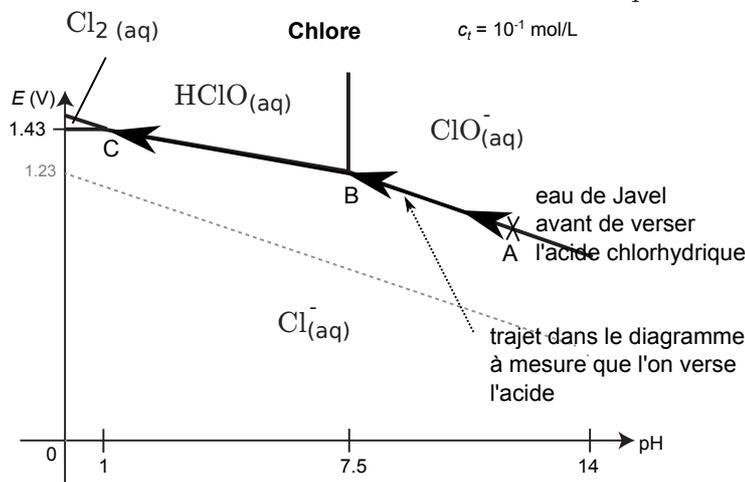
On en conclut que Cl^- se situe en bas, Cl_2 dans le coin à gauche, et HClO et ClO^- en haut.

★ Entre ces deux dernières espèces, on écrit la réaction acide-base : $\text{HClO} = \text{ClO}^- + \text{H}^+$, donc HClO est l'acide, qui est du côté des bas pH à gauche, et ClO^- est la base, du côté des hauts pH à droite.

2 - On remarque qu'il y a un point à l'intersection entre trois domaines avec trois n.o. différents (le point au bout du coin du domaine de Cl_2). Il y a donc dismutation de Cl_2 .

Il se dismute en les deux espèces chimiques adjacentes, à savoir HClO et Cl^- .

3 - a - Au départ, on est en présence de ClO^- et de Cl^- . On est donc quelque part sur la frontière entre ces deux domaines. Disons au point A dans le diagramme ci-dessous.



Puis on verse l'acide : les ions H^+ réagissent avec ClO^- pour le transformer en HClO . On se déplace donc entre les points A et B, le pH diminue.

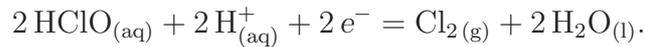
On reste le long de la frontière car il y a toujours présence à la fois de Cl^- et soit de ClO^- (tant qu'il en reste encore) soit de HClO .

Arrive un moment où on atteint le point pH du point C. On continue de verser H^+ , donc d'abaisser le pH. On rentre donc dans le domaine de Cl_2 : il y a formation de Cl_2 selon une réaction de médiامتutation (l'inverse de la réaction de dismutation).

- b** - C'est Cl^- et HClO qui se transforment en Cl_2 (ce sont eu xqui sont adjacent au domaine de Cl_2 . On va donc écrire les deux demi-équations avec la méthode habituelle, puis les sommer pour avoir l'équation bilan globale.

Les couples oxydant/réducteur impliqués sont donc :

- HClO/Cl_2 , demi-équation :

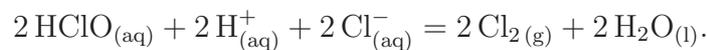


- Cl_2/Cl^- , demi-équation :

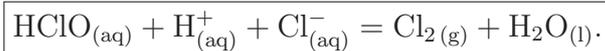


On controle qu'on a bien les électrons du bon côté à chaque fois (côté oxydant, car $\text{Ox} + ne^- = \text{Red}$).

Enfin, on effectue la première moins la seconde afin d'éliminer les électrons :



Soit encore :



- c** - On considère la réaction précédente. On peut faire un tableau d'avancement, ou pas.

Pour répondre, il faut d'abord déterminer le nombre de moles de $\text{Cl}_{2(\text{g})}$ produit si l'on fait réagir tous les $\text{HClO}_{(\text{aq})}$ avec H^+ .

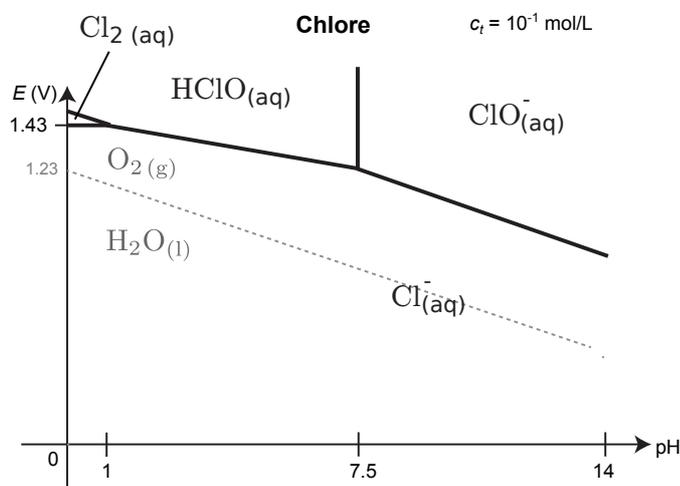
On a initialement une quantité de matière de $\text{HClO}_{(\text{aq})}$ donnée par $n_0 = c \times V = 1.6 \text{ mol}$. S'ils sont tous consommés, d'après l'équation de la réaction on produit $n_0 = 1.6 \text{ mol}$ de $\text{Cl}_{2(\text{g})}$.

Reste à exprimer le volume occupé par ces n_0 moles de gaz. Il s'agit d'un volume

$$\boxed{V_{\text{gaz}} = n_0 \times V_m = 1.6 \times 22.4 = 35.8 \text{ L.}}$$

Le dichlore étant un gaz très toxique, et le volume dégagé pour 1 L d'eau de Javel étant tout de même important, on en conclut qu'il est peu conseillé de mélanger eau de Javel et acide.

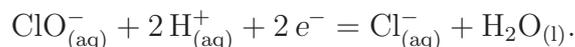
- 4** - On complète le diagramme E-pH avec celui de l'eau :



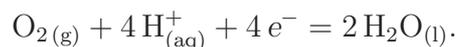
On voit que $\text{ClO}^-_{(\text{aq})}$ et $\text{H}_2\text{O}_{(\text{l})}$ ont des domaines disjoints. Leur réaction l'un avec l'autre est donc favorisée thermodynamiquement. L'eau de Javel perd donc progressivement ces ions $\text{ClO}^-_{(\text{aq})}$, qui sont pourtant ceux qui sont efficaces pour le pouvoir désinfectant (c'est un oxydant puissant).

Pour écrire l'équation de la réaction on écrit les deux demi-équations en jeu :

- ClO^-/Cl^- , demi-équation :



- $\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$, demi-équation :



On effectue enfin deux fois la première équation moins la seconde pour faire disparaître les électrons :



Enfin, cette réaction est cinétiquement très lente, et c'est pourquoi l'eau de Javel est tout de même utilisable pendant un certain temps. (Elle est d'ailleurs lente en particulier en l'absence de lumière, c'est pour cela que les berlingots de Javel sont opaques.)

Mécanique

23.1 Saut à l'élastique (méc. du point)

[●○○]

23.1 – Coup de pouce : 2 – Prendre un axe z orienté vers le bas, avec $z = 0$ au départ du saut. Attention, il y a deux phases dans le mouvement : la première étant une chute libre tant que l'élastique n'est pas tendu.

23.1 – Correction

1 - a - On prend $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. D'après la documentation :

- Un allongement de 100% correspond à $l - l_0 = l_0$, et à une tension de 2000 N.
- Un allongement de 200% correspond à $l - l_0 = 2l_0$, et à une tension de 3250 N.

Ainsi, $l - l_0$ a doublé, mais pas la tension. La formule qui rend compte de la tension n'est donc pas celle utilisée pour un ressort.

b - On a $k = \frac{T}{l - l_0}$, donc soit $\frac{2000}{6} = 3.33 \times 10^2 \text{ N/m}$, soit $\frac{3250}{12} = 2.71 \times 10^2 \text{ N/m}$.

On prend la moyenne : $k = 3.0 \times 10^2 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$.

2 - Référentiel terrestre supposé galiléen, système {personne de masse m }. Axe z orienté vers le bas, avec $z = 0$ au départ du saut. Obligatoirement faire un schéma.

Deux phases :

- $z \leq l_0$: Chute libre tant que l'élastique n'est pas tendu.

On a $m\ddot{z} = mg$, d'où $\dot{z} = gt$ et $z(t) = \frac{1}{2}gt^2$ (les constantes d'intégration sont nulles car $\dot{z}(0) = 0$ et $z(0) = 0$).

Ceci dure jusqu'à ce que $z(t_1) = l_0$, donc jusqu'à $t_1 = \sqrt{2l_0/g} = 1.1 \text{ s}$.

- $z \geq l_0$: L'élastique est tendu.

Pour simplifier on définit un nouveau temps $t' = t + t_1$, tel que à $t' = 0$ on est au début de la phase 2.

On a $m\ddot{z} = mg - k(l - l_0) = mg - k(z - l_0)$, soit $\ddot{z} + \omega_0^2 z = g + \frac{kl_0}{m}$ avec $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

Les solutions sont du type solution de l'équation homogène ($z_H(t') = A \cos \omega_0 t' + B \sin \omega_0 t'$) plus solution particulière ($z_P(t') = l_0 + mg/k$ obtenue en faisant $\ddot{z} = 0$) :

$$z(t') = A \cos \omega_0 t' + B \sin \omega_0 t' + l_0 + \frac{mg}{k}.$$

Or $z(t' = 0) = l_0$, donc $A + l_0 + \frac{mg}{k} = l_0$, donc $A = -\frac{mg}{k}$.

Et $\dot{z}(t' = 0) = gt_1$ donc $\omega_0 B = gt_1$, donc $B = \frac{gt_1}{\omega_0} = \sqrt{\frac{2l_0 mg}{k}}$.

- On peut remarquer que lorsque la personne remonte, il arrivera un moment où l'élastique ne sera plus tendu : c'est une troisième phase, etc...

3 - On peut dire que $z(t) \leq |A| + |B| + l_0 + \frac{mg}{k} = \sqrt{\frac{2l_0mg}{k}} + l_0 + \frac{2mg}{k} = 19 \text{ m}$.

La hauteur du pont étant de 182 m, il y a encore de la marge.

La valeur trouvée est compatible avec l'indication "longueur à vide de 6 m pour un saut de 25 m".

4 - On a à l'équilibre : $0 = mg - k(z - l_0)$, d'où $z_{\text{éq}} = l_0 + \frac{mg}{k}$.

23.2 Bille dans un tonneau (méc. du point)

[●○○]

23.2 – Coup de pouce : 1 – Utiliser une méthode énergétique. 2 – Si on cherche une condition minimale, et sans plus d'information, on néglige tout frottement. Les forces sont donc la réaction normale \vec{N} et le poids $m\vec{g}$. On cherche donc une condition pour que N ne s'annule jamais. Prendre des coordonnées cylindriques avec $\theta = 0$ en bas. On rappelle, mais c'est à connaître, que $\vec{OM} = R\vec{e}_r$, $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$, et $\vec{v} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r$.

23.2 – Correction

1 - Conservation de $E_c + E_p$, qui vaut $0 + mgh$ en haut, et $\frac{1}{2}mv^2 + 0$ en bas. Donc à l'entrée dans le tonneau, $E_c = mgh$.

2 - Référentiel terrestre supposé galiléen, système étudié = {bille} que l'on suppose ponctuelle. Pas de frottements. Les seules forces sont le poids $m\vec{g} = mg(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta)$ et la réaction normale du support $\vec{N} = -N\vec{e}_r$ (signe moins pour que $N \geq 0$).

On veut que $N > 0$ tout au long du mouvement pour qu'il n'y ait pas rupture du contact.

PFD : $m\frac{d\vec{v}}{dt} = -N\vec{e}_r + mg(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta)$, avec (mouvement circulaire) $\vec{v} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r$.

On en déduit $N = mg\cos\theta + mR\dot{\theta}^2$.

Il faut trouver une expression pour $\dot{\theta}^2$. Le plus simple est d'utiliser le théorème de l'énergie mécanique :

$$E_c + E_p = \text{cst} = mgh, \quad \text{soit} \quad \frac{1}{2}m(R\dot{\theta})^2 + mg(R - R\cos\theta) = mgh.$$

On isole $\dot{\theta}^2$. On injecte dans l'équation sur N . On obtient $N = mg\cos\theta + mg\frac{2h}{R} + 2mg(\cos\theta - 1)$.

On a donc $N > 0$ tout au long du mouvement si et seulement si

$$mg(-1) + mg\frac{2h}{R} + 2mg(\cos\theta - 1) > 0,$$

si et seulement si $h > \frac{5}{2}R$.

